Facultad de Educación
Programa de Formación Pedagógica
Sede de la Patagonia – Puerto Montt

Análisis de tareas en textos escolares de 7° básico, relacionados al círculo y circunferencia bajo el enfoque de los niveles del Modelo de Van Hiele

Tesina para optar al Grado de Licenciado en Educación

Profesor Tutor: Mg. Patricia Carrera

Estudiante(s): Washington Cottenie
César Soto

Puerto Montt, Chile

2022

FACULTAD DE EDUCACIÓN
PROGRAMA FORMACIÓN PEDAGÓGICA
SEDE DE LA PATAGONIA – PUERTO MONTT

CALIFICACIÓN DEL EXAMEN DE GRADO

En Puerto Montt, el 27 de enero de 2023 los abajo firmantes dejan constancia de que los estudiantes:

Washington Cottence Castillo, Cesar Soto Díaz

del Programa Formación Pedagógica para Licenciados y/o Profesionales, en el área de Matemática, han aprobado el examen de grado con las siguientes calificaciones:

Nombre estudiante	Calificación
Cesar Soto D.	7,0
Washington Cottence C.	6,4

Firma Docente evaluador/a

Firma Docente evaluador/a

Firma Docente evaluador/a

Dedicatoria

El presente trabajo de grado va dedicado a Dios, quien como guía estuvo presente en el caminar de mi vida, bendiciendo y dándome fuerzas para continuar con mis metas trazadas sin desfallecer.

César Soto

Dedico este trabajo de grado a Dios y a toda mi familia, a mis padres en especial que siempre están presentes y que me enseñaron a afrontar las diversas dificultades en el transcurso de mi vida y ser un apoyo incondicional en todo momento.

Washington Cottenie

AGRADECIMIENTOS

Por el presente logro agradezco a Dios por permitirme lograr un sueño cómo es ser profesor.

A mi esposa Norma y a mis hijas Brenda y Samantha, por ser un pilar fundamental en mi vida, acompañarme siempre en mi camino educacional.

A mi madre por su apoyo incondicional y siempre creer en mí, como así a mis hermanos.

A mis profesores de enseñanza básica que me inspiraron para elegir la pedagogía como un camino para educar a nuevas generaciones.

Agradezco a todos los docentes de la Universidad San Sebastián de Puerto Montt, por su apoyo, enseñanzas y motivaciones en este proceso educativo.

César Soto

En primer lugar, agradezco a mis padres por su apoyo incondicional, son el pilar fundamental.

También agradezco a mi pareja Mariana por su apoyo para alcanzar mis objetivos.

Agradezco de forma especial a la profesora guía Patricia Carrera y profesora de seminario de investigación Francisca Vega, por su dedicación y paciencia en todo el transcurso del proceso.

También agradezco a todos los docentes de la institución, por su empatía y apoyo en todo el proceso de formación, por su dedicación y motivación en la enseñanza.

Agradecer a todos mis compañeros del programa de formación pedagógica, gracias por su buena onda a lo largo de los trimestres y enseñanzas de su experiencia profesional.

Por último, agradecer a la Universidad San Sebastián sede de la Patagonia.

Índice

Índice de imágenes

Índice de tablas

Resumen

La investigación denominada “Análisis de tareas en textos escolares de 7° básico, relacionados al círculo y circunferencia bajo el enfoque de los niveles del Modelo de Van Hiele” se desarrolló como estudio de Tesina para optar al Grado de Licenciado en educación de la Universidad de San Sebastián de Puerto Montt sede Patagonia.

La investigación se orientó en analizar los textos del ministerio de educación en la asignatura de matemáticas, específicamente en séptimo básico en el eje de geometría, en los objetos matemáticos como el círculo y la circunferencia.

Se realizaron las siguientes acciones como parte de esta investigación, la cual tiene un enfoque cualitativo: análisis de secuencias y tareas propuestas en el texto escolar y el cuaderno de actividades, identificación del nivel de complejidad y movilidad de saberes, a través de los niveles del modelo de Van Hiele.

Dentro de las principales conclusiones de esta investigación, encontramos que los textos entregados por el ministerio de educación presentan tareas para abordar los conceptos de círculo y circunferencia que se encuentran en los niveles centrales según lo propuesto por el modelo de Van Hiele.

Palabras Claves

Modelo – Círculo – Circunferencia – Educación – Tareas – Van Hiele – Niveles

Abstract

The investigation called "Analysis of tasks in 7th grade school textbooks, related to the circle and circumference under the approach of the levels of the Van Hiele Model" was developed as a Thesis study to qualify for the Degree of Bachelor of Education at the University of San Sebastián de Puerto Montt Patagonia headquarters.

The research was oriented to analyze the texts of the Ministry of Education in the subject of mathematics, specifically in seventh grade in the axis of geometry, in mathematical objects such as the circle and the circumference.

The following actions were carried out as part of this research, which has a qualitative approach: analysis of sequences and tasks proposed in the school textbook and the activity notebook, identification of the level of complexity and mobility of knowledge, through the levels of the Van Hiele model.

Among the main conclusions of this research, we find that the texts delivered by the Ministry of Education present tasks to address the concepts of circle and circumference found in the central levels as proposed by the Van Hiele model.

Keywords

Model – Circle – Circumference – Education – Tasks – Van Hiele – levels

Introducción General

El proceso de enseñanza - aprendizaje de las matemáticas y las múltiples habilidades que esta disciplina desarrolla, presenta una serie de desafíos para todos los miembros del sistema educativo. De ahí se logra entender que este proceso se haya convertido en una preocupación constante de los profesionales de la educación, especialmente si consideramos el bajo dominio de los contenidos asociados a esta asignatura. A esto hay que añadir que nuestra sociedad actual, cada vez más desarrollada tecnológicamente, demanda con insistencia niveles más altos de competencias en el área de las matemáticas.

Es por este contexto que, el objetivo de esta investigación estará centrado en la realización de un análisis de carácter cualitativo de las tareas propuestas por el ministerio de educación de nuestro país, las cuales son difundidas a través de los libros de textos y cuadernillo de ejercicios.

Se centrará específicamente en las tareas propuestas para el aprendizaje de los conceptos de círculo y circunferencia en 7° básico, tomando como referencia los niveles propuestos por el modelo de Van Hiele.

CAPÍTULO 1: ANTECEDENTES

En este capítulo se abordarán tres apartados asociados a los antecedentes que fueron revisados y recopilados para poder llevar a cabo está investigación, que se dan a conocer a continuación.

1.1 Dificultades con el estudio del círculo y la circunferencia

Goncalves (2006) encontró que, si bien los estudiantes tienen habilidades para resolver problemas concretos, es menos probable que encuentren soluciones cuando se enfrentan a las mismas situaciones que ocurren en otras situaciones más abstractas o formalizadas. Otra situación típica es "(...) la de un estudiante que debe recurrir a la memorización de un teorema o a la demostración de un problema porque es la única manera de aprobar el examen" (Goncalves, 2006, p. 90).

Por lo tanto, es necesario repensar el tipo de actividades que se proponen a los estudiantes, la forma en que se comunican los desafíos o las tareas a los estudiantes en el aula, en el contexto del aprendizaje profundo que los estudiantes han completado y los recursos disponibles, como las tareas enumeradas en los libros de texto escolares. A pesar de estar incorporado en el currículum y ampliamente estudiado los estudiantes siguen teniendo dificultades con el uso de este concepto, algunas de estas dificultades han sido descritas por Autores como Abrate, Delgado y Pochulu (2006) plantean que algunos docentes y algunas docentes priorizan la enseñanza de otras áreas de las matemáticas, postergando los contenidos de geometría hasta el final del curso, omitiendo algunos temas o abordándolos de manera superficial. Enseñar geometría con este enfoque, produce que los estudiantes consideren la geometría como un área de difícil estudio o carente de significado para ellos.

En el sistema educativo formal, el contenido de geometría se suele presentar al alumnado como el resultado final de un problema matemático. La enseñanza tradicional en esta disciplina enfatiza la memorización de fórmulas para calcular áreas y volúmenes y el apoyo de definiciones geométricas, teoremas y propiedades a través de construcciones mecánicas y descontextualizadas.

La geometría puede ser vista como una herramienta recursiva que permite al ser humano resolver muchos tipos de problemas y comprender el mundo en cada uno de los escenarios que lo componen, por lo que la educación en este campo logra el objetivo deseado, autores como Almeida (2002) señalan la existencia de unas metas generales que todo ser humano debería alcanzar en su educación básica, en la utilización de distintos lenguajes y expresiones para poder aplicarlos en problemas de la vida cotidiana.

El sistema escolar chileno sufrió efectos negativos en relación con la educación generando un desempeño insuficiente en las escuelas y liceos del país. Para poder mitigar el problema, el Ministerio de Educación implementó diversas medidas, entre otras, creó la priorización del currículo, para que cada institución educativa priorice las metas que considere necesarias para continuar el proceso educativo de los escolares del país. Ofrece a cada escuela o escuela secundaria superior la flexibilidad de implementar el plan de estudios de acuerdo con sus propios métodos y organización interna. (Mineduc, 2021)

El plan Escuelas Arriba, se creó en 2019 para apoyar a las escuelas y colegios secundarios clasificados como inadecuados por la Agencia de Calidad de la Educación. Este año, amplió su alcance para servir a todas las instituciones del país que necesitan dinamizar el aprendizaje. Hasta la fecha, ya se han vinculado a este plan más de 3.100 establecimientos. (reveduc, 2021)

Es un programa de apoyo técnico pedagógico que se enfoca en la restauración y nivelación de aprendizajes a través de la metodología de nivelación y readiestramiento basada en los procesos de seguimiento y evaluación para la toma de decisiones pedagógicas. Se enfoca en contenidos de las tareas de lenguaje y matemáticas de 3° básico a 2° medio. (Mineduc, 2021)

En relación a los objetivos asociados a la comprensión del círculo, los cuales son abordados de 7° básico la agencia de educación detectó que entre las principales dificultades y problemas de aprendizaje presentados por los estudiantes se encuentra: (1) Cálculo de área, (2) relación entre radio y diámetro (3) dificultad para comprender el concepto de Pi (Símbolo) Cómo número y medida de relación entre elementos del círculo,

(4) no identifican claramente las diferencias entre circunferencia y círculo (5) dificultad en el uso de datos relacionados al radio y diámetro (confunden el radio con el diámetro) (6) Confunden la potencia de exponente 2 con una multiplicación de factor 2 en relación al cálculo de área, (7) para el perímetro, no reconocen la relación entre circunferencia y diámetro y para el área, no reconocen la relación entre círculo y radio, Finalmente al leer el enunciado de un ejercicio no comprenden la situación y cometen errores al plantear el enunciado e identificar las variables.

1.2 Modelo de Van Hiele

A partir de varios estudios, se han logrado construir diversos marcos teóricos y enfoques vinculados a la mejora del aprendizaje de la geometría, uno de los más destacados es el modelo de Van Hiele el cual es una propuesta que parece describir este desarrollo con bastante precisión y está ganando reconocimiento internacional en la geometría escolar (Falconí-Procel, 2021). Van Hiele propone cinco niveles de desarrollo del pensamiento geométrico, que muestran una forma de estructurar el aprendizaje de la geometría.

Según Vargas y Gamboa, (2013) el modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele explica cómo se desarrolla el razonamiento geométrico de los estudiantes, separándolo en cuatro niveles sucesivos, un estudiante que está en un cierto nivel al inicio del aprendizaje y a medida que avanza en el proceso, avanza a un nivel superior.

Es fundamental que los docentes sean capaces de visualizar la trayectoria del aprendizaje y la construcción cronológica de las fases de enseñanza y aprendizaje a través del modelo de Van Hiele, ya que esto permitirá anticipar el tipo de razonamiento del estudiante, con el fin de lograr un aprendizaje matemático más significativo. (Berciano, 2021)

El modelo de Van Hiele también muestra cómo se puede ayudar al estudiante a mejorar la calidad de su razonamiento geométrico, porque proporciona pautas para la organización del plan de estudios y por lo tanto, la transición del estudiante de un nivel a otro.

1.3 Uso de textos escolares

Un texto escolar es una obra para uso en clase que proporciona una introducción sistemática a un tema o materia. Incluyen aspectos no controvertidos de disciplinas decantados en conocimiento aceptado y completo que puede ser comunicado sin autoridad (Lolas, 1996).

También se encontró que los estudiantes aprenden más con los libros de texto que sin ellos, manteniendo constante su habilidad y el nivel del profesor. Dos estudios separados citados en el Compendio de Estudios de Política Educativa de la Universidad de Harvard, concluyeron que los estudiantes que recibieron los textos, se desempeñaron significativamente mejor en una prueba de rendimiento de fin de año que aquellos que no los recibieron. También se refieren a un estudio realizado en Brasil, según el cual los estudiantes que trabajaron en un texto durante cinco años lograron resultados significativamente mejores que los estudiantes que no recibieron libros de texto. (McGinn y Borden, 1995).

Por su parte Rodriguez (1984) señala que los libros de texto escolares tienen varias funciones, y una de ellas, sin duda, los convierte en una herramienta pedagógica que los transforma en elementos que facilitan el aprendizaje. Es el elemento principal de estudiantes y docentes, en primer lugar, facilita y mejora el aprendizaje, en segundo lugar, dirige, limita y apoya el proceso didáctico. Debe estar basado en las características y experiencias del estudiante y es material que puede ser utilizado en la escuela, como ayuda o ventaja de fuente de información o como potenciador del aprendizaje.

1.4 Potenciar el pensamiento geométrico

Es evidente las múltiples necesidades que presentan los estudiantes a la hora de abordar nuevos objetivos de aprendizajes referidos a objetos matemáticos, en este caso puntualmente en elementos geométricos, lo cual se evidencia en las siguientes problemáticas:

La enseñanza mecanizada de los contenidos de geometría, que no permite una mejor y mayor profundización de estos objetos matemáticos.

También las dificultades que presentan los estudiantes en geometría, ya que no lo relacionan con otros objetivos previamente aprendidos.

A su vez el texto escolar como referente en las propuestas de tareas para abordar los objetivos de aprendizaje en geometría.

Por último, la propuesta del Modelo de Van hiele permite al profesor contar una herramienta pedagógica que facilite al estudiante una mejor comprensión del aprendizaje de geometría.

Por lo tanto, considerando los antecedentes comentados a los largos de este apartado cabe preguntarse

¿Qué elementos del modelo de Van hiele se movilizan en las tareas propuestas en los textos de estudio del curriculum Chileno para el caso del círculo y la circunferencia?

1.5 Pregunta de Investigación

¿Qué niveles del modelo de Van Hiele para el caso particular del círculo y la circunferencia están presentes en las tareas propuestos en los textos de estudio del curriculum nacional chileno de 7º básico?

1.6 Objetivo general

Analizar las tareas propuestas en los textos de estudio de 7º básico del currículum nacional chileno vinculadas al aprendizaje del círculo y la circunferencia, asociadas a los niveles del Modelo de Van Hiele.

1.7 Objetivos específicos

OE1: Identificar y revisar los niveles del modelo de Van Hiele en geometría, para el caso del círculo y circunferencia.

OE2: Caracterizar las tareas propuestas en el libro de texto y programa de estudio de 7º básico en el eje de geometría vinculadas a los conceptos del círculo y circunferencia del currículum nacional chileno vigente**.**

OE3: Describir el comportamiento de los niveles en las tareas propuestos de forma general en los textos de estudio.

CAPÍTULO 2: MARCO TEÓRICO

2.1 Niveles de razonamiento geométrico de Van Hiele

El modelo de Van Hiele explica cómo el razonamiento geométrico de los estudiantes transita por varios niveles en el proceso de aprendizaje de la geometría. Para dominar el nivel en el que se encuentra y por tanto pasar inmediatamente a un nivel superior, el estudiante debe seguir determinados logros y procesos de aprendizaje (Vargas y Gamboa, 2013, p. 81).

A continuación, se detallan los niveles:

2.1.1 Nivel 1. Reconocimiento o Percepción: Este es el nivel más básico de razonamiento. Los estudiantes pueden percibir figuras geométricas como un todo e incluir atributos en su descripción. En la imagen n°1 se muestra el resumen del nivel n°1.

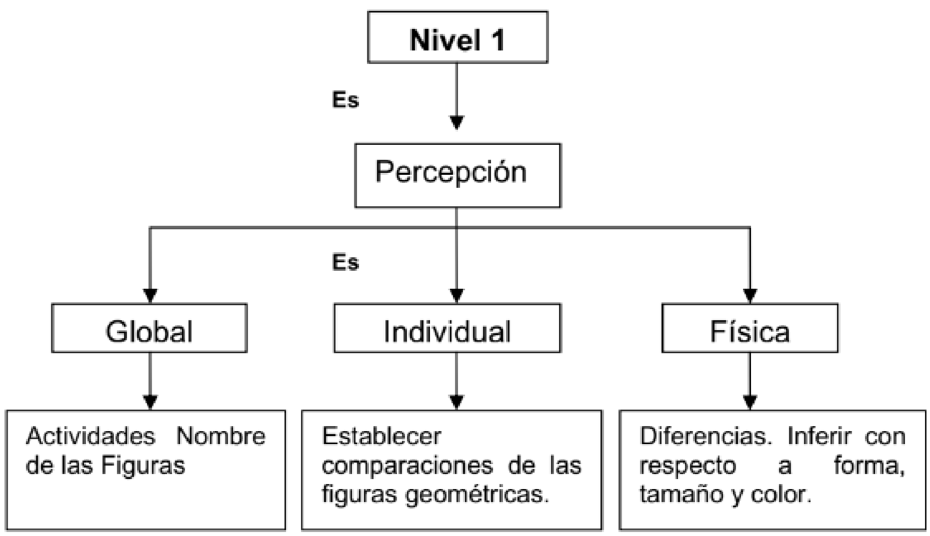


Imagen 1: Nivel 1. Reconocimiento o Percepción

Fuente: Rizzolo(2007)

2.1.2 Nivel 2. Análisis: En este nivel, por primera vez, se presenta un tipo de razonamiento que puede llamarse matemático. Los estudiantes pueden descubrir y generalizar propiedades basadas en la observación y la manipulación. En la imagen n° 2 se muestra el resumen del nivel n°2.

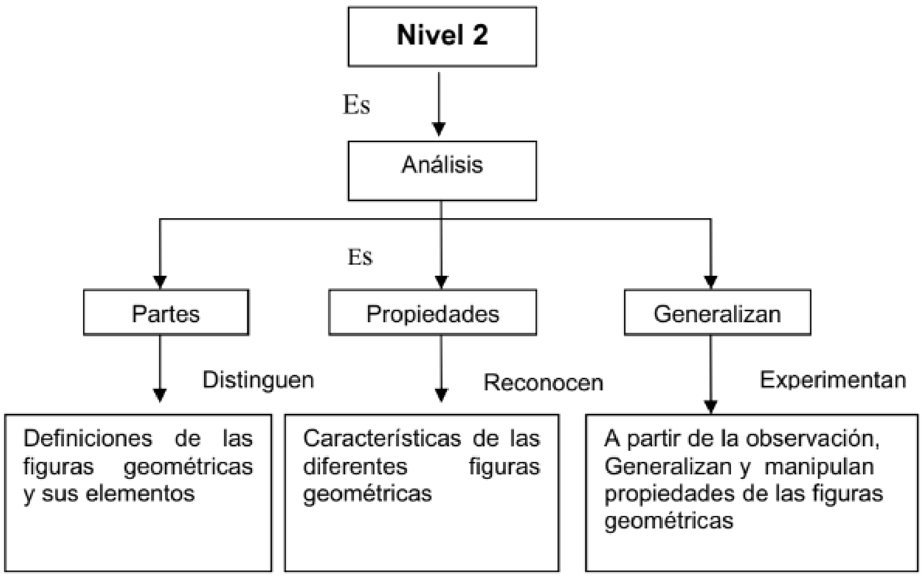


Imagen 2: Nivel 2. Análisis

Fuente: Rizzolo(2007)

2.1.3 Nivel 3. Clasificación: En este nivel, los estudiantes comprenderán que algunos rasgos pueden derivarse de otros y desarrollarán la capacidad de relacionar lógicamente diferentes propiedades de éste o diferentes figuras. En la imagen n°3 se muestra el resumen del nivel n°3.

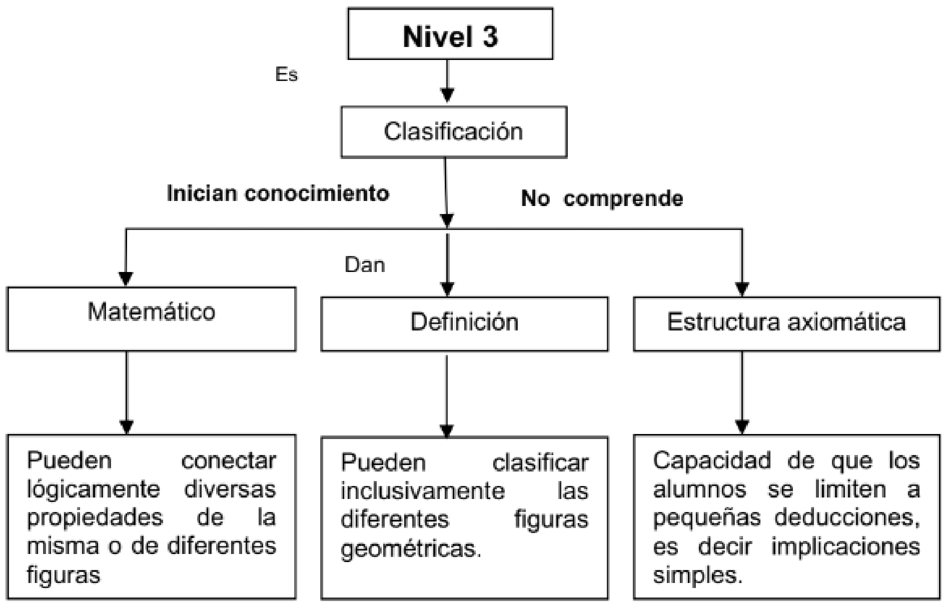


Imagen 3: Nivel 3. Clasificación

Fuente: Rizzolo(2007)

2.1.4 Nivel 4. Deducción Formal: Los estudiantes adquieren habilidades de razonamiento matemático y una visión global del tema de estudio. En la imagen n°4 se muestra el resumen del nivel n°4.

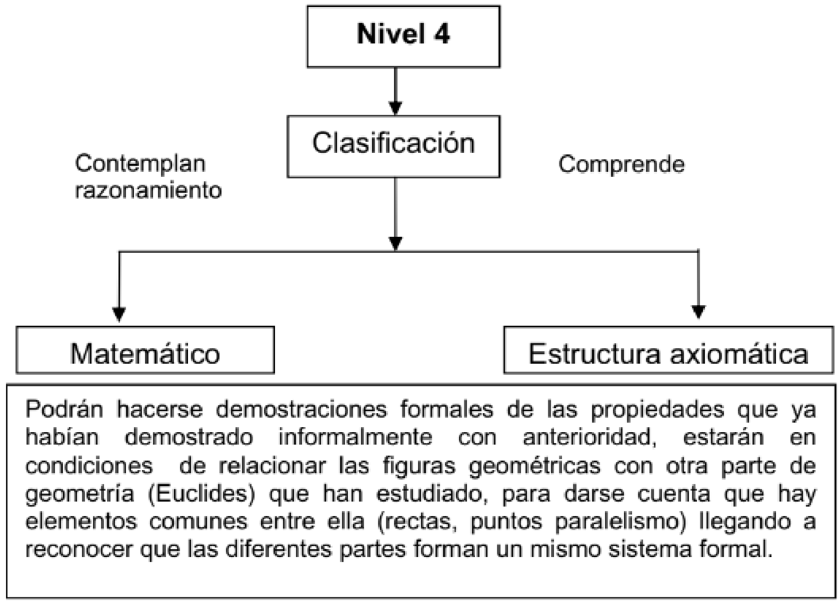


Imagen 4: Nivel 4. Deducción Formal

Fuente: Rizzolo(2007)

A continuación, en la tabla n°2 se indica un resumen de elementos explícitos e implícitos asociados a los niveles descritos anteriormente.

Tabla 1: Resumen de niveles asociados a elementos

	Elementos explícitos	**Elementos implícitos**
Nivel 1	Figuras	Reconoce las figuras
Nivel 2	Figuras y Objetos	Partes y propiedades de la figuras
Nivel 3	Partes y propiedades de la figuras	Implicaciones entre propiedades
Nivel 4	Implicaciones entre las propiedades	Deducción formal de teoremas

Fuente: Van Hiele (1986)

2.2 Círculo y circunferencia

2.2.1 Definiciones generales

Existen diversas definiciones en torno al círculo y circunferencia, algunas de ellas fueron entregadas por Bemblire (2009) quien las describe como una de las figuras geométricas más básicas y simples de las que conocemos en geometría. Se define como la figura generada por una curva cerrada o perímetro en el cual no hay vértices ni ángulos internos. Además, la circunferencia no tiene lados diferenciados, como sí sucede con otras figuras tales como el cuadrado o el triángulo. También encontramos definiciones específicas para el círculo como la mencionada por Matarrita (2015) quien indica que el círculo es una figura plana que está formada por una circunferencia que la limita y la parte del plano en su interior.

En relación con lo anterior se puede concluir que es posible definir de forma sencilla a la circunferencia como una línea curva cerrada, siendo a su vez el círculo la superficie del plano limitada por dicha curva, tal como se observa en la imagen 5.

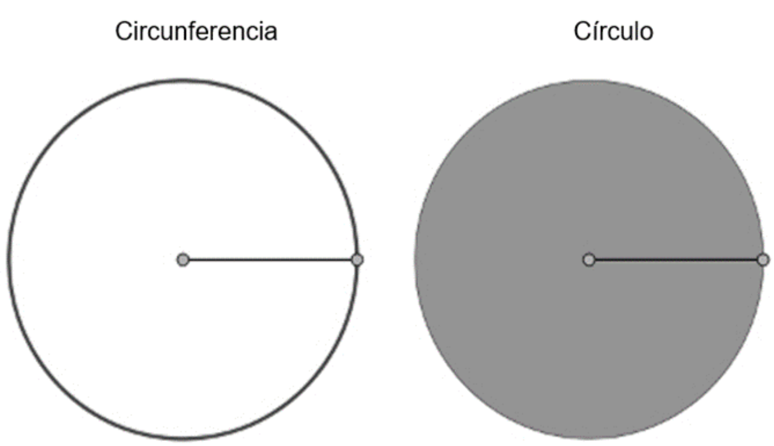


Imagen 5: Circunferencia v/s Círculo

Fuente: Elaboración Propia

2.2.2 Historia del Círculo

Desde hace cientos de años el concepto del círculo y la circunferencia ha estado presente en la historia de la humanidad, algunas de las áreas en donde es posible vislumbrar nociones de este concepto son el arte, la religión, la arquitectura, entre otros, en los siguientes apartados se detalla un poco más la presencia de este elemento en una serie de campos.

2.2.3 Circunferencia, Círculo y religión

La palabra círculo proviene de la palabra latina circulus, que significa redondo o circular. Un círculo es un patrón lineal sin principio ni fin; simboliza la eternidad, la perfección y lo absoluto. En la religión judeocristiana, el círculo se asocia con el infinito, lo que le da un matiz religioso y simboliza a Dios. “Yo soy el Alfa y la Omega, principio y fin” (Apocalipsis 1:8)

En algunas sociedades, el círculo representaba a Dios como una figura que no tenía principio ni fin. La imaginación es subjetiva, crea cosas en la mente de las personas y las hace actuar. Joseph Campbell (2013) explica que la palabra religión significa unir, es decir, unir a todos los miembros en una sola comunidad. Las primeras ciudades se construyeron en forma redonda, por lo que para algunas religiones el centro del círculo simbolizaba el ojo abierto de Dios, lo que significaba revelación, bendición y prosperidad.

2.2.4 Circunferencia, Círculo y ciencias

Este elemento está muy presente en las formas que presenta nuestro entorno, desde inmensos objetos como la luna o el sol hasta objetos pequeños incorporados en los seres humanos como la pupila humana.

En toda cosmología, el hombre está regido por las estrellas visibles en el cielo. El sol, la luna y los planetas se ven como círculos o puntos distantes. Se mueven en círculos en el cielo, por lo que las culturas los han asociado con dioses (Bruce-Mitford, 1997). En un lugar más mundano, en los reinos mineral, vegetal y animal, el círculo mantiene su presencia.

2.2.5 Cuadratura del círculo

El interés por el estudio del círculo y la circunferencia data de hace mucho, Arquímedes en el siglo dos antes de cristo también se ocupó de la medida del círculo en gran parte de su vida tratando de establecer la equivalencia del problema de la cuadratura del círculo y la rectificación de la circunferencia y el cálculo de π con notable aproximación. (Montesinos, 1992).

2.2.6 Aplicaciones

La circunferencia y el círculo son uno de los elementos geométricos más importantes en el campo de la geometría, ha supuesto un gran avance desde su invención en la prehistoria. El desarrollo circular en la vida cotidiana tuvo diversas aplicaciones tales como construcción de la sociedad moderna y la confección de artefactos como la bicicleta la cual revolucionó el medio de transporte básico permitiendo la comunicación entre lugares distantes de la población. (Moreno, 2000)

Tal es la importancia del círculo y la circunferencia que diversos países han decidido incluir dichos conceptos dentro de su currículum obligatorios, entre dichos países de encuentra Chile, en donde se observan trabajos generales desde primera infancia hasta concretar definiciones complejas como la ecuación de una circunferencia en los últimos niveles.

Dado que el círculo y la circunferencia son los elementos que ocupan nuestro interés en este estudio, a continuación, se presentan algunas definiciones asociadas, basadas en el trabajo de Carmona (2001) quien centró su trabajo de fin de máster en Universidad de Colombia en la elaboración de una propuesta didáctica que vinculará el modelo de Van Hiele con la circunferencia.

En dicho trabajo el autor hace una revisión exhaustiva del desarrollo histórico, epistemológico seguido de una descripción disciplinar basada en las propiedades de la circunferencia desde el enfoque de la Geometría Sintética y la Geometría Analítica tomando para ello como referencia partes del Libro III de Euclides y definiciones referentes a las propiedades de la circunferencia en textos de Geometría euclidiana y de Geometría analítica, entre los cuales se destacan: Geometría elemental A. V. Pogorélov., el Curso de Geometría de Landaverde, Circulando por el Círculo de Fernández, la Geometría del Siglo XXI de Flores y textos de Geometría y de matemáticas Universitarios.

2.3 Geometría sintética

2.3.1 Definiciones con enfoque de geometría sintética

Una circunferencia de centro O y radio $r > 0$ es el conjunto de puntos P tales que $|\underline{OP}| = r$ También llamamos radio a cualquier segmento que une un punto sobre la circunferencia con O. El segmento que une dos puntos de la circunferencia se llama cuerda. Si la cuerda contiene al origen la llamamos diámetro (de la circunferencia o círculo). También llamamos diámetro al valor común de las longitudes de los diámetros (que es $2r$).

2.3.2 Teorema 1 (Pogorélov).

En una circunferencia, una recta que contiene un diámetro es eje de simetría y el centro de la circunferencia es centro de simetría. Demostración. Sea a el diámetro de la circunferencia y sea x un punto cualquiera de la misma (imagen 6). Construyamos el punto x_1 simétrico del punto x respecto al diámetro a los triángulos rectángulos OA_x y OA_{x1} son iguales. Tienen el cateto OA común y los catetos Ax y A_{x1} son iguales por definición de simetría. De la igualdad de los triángulos resulta que $Ox_1 = Ox$. Pero esto significa que el punto x_1 se halla en la circunferencia. O sea, la simetría respecto al diámetro transforma la circunferencia en sí misma, es decir, el diámetro es el eje de simetría de la circunferencia. Construyamos ahora el punto x_2 simétrico del punto x respecto al centro O de la circunferencia. Según la definición de la simetría respecto al punto, se tienen $Ox_2 = Ox$, o sea, el punto x_2 se halla en la circunferencia. Por consiguiente, el centro de la circunferencia es el centro de simetría. Demostrado el Teorema.

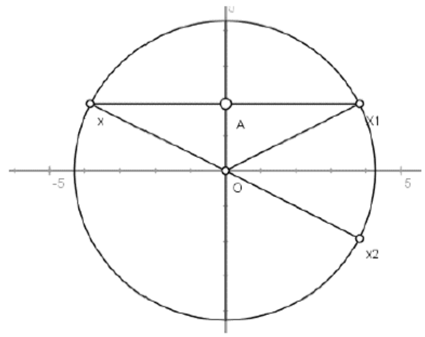


Imagen 6: Teorema 1 Pogorélov

Fuente: Carmona (2011)

2.3.3 Proposición. Si en la circunferencia de centro O y radio r el diámetro AB corta a la cuerda PQ en R, entonces $\measuredangle ARP = 90°$ si y sólo si R es el punto medio de PQ. Esto es Euclides III.3. Proposición 3. Si en un círculo una recta dibujada a través del centro divide en dos partes iguales a otra recta no dibujada a través del centro, la corta formando también ángulos rectos; y si la corta formando ángulos rectos, la divide también en dos partes iguales.

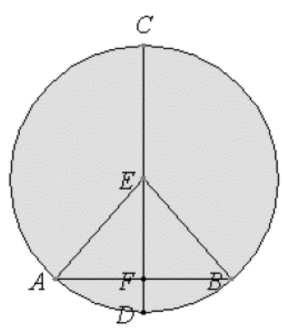


Imagen 7: Euclides Preposición 3

Fuente: Carmona (2011)

2.3.4 Teorema 2 Pogorélov. El diámetro perpendicular a la cuerda la divide por la mitad. Demostración: Sea AB la cuerda dada y sea C su punto medio (Imagen 8). Tracemos el diámetro que pasa por el punto C . Los triángulos OCA y OCB son iguales por el tercer criterio de la igualdad de los triángulos. Tienen iguales los lados OA y OB que son radios, el lado OC es común y $|\underline{AC}| = |\underline{CB}|$ porque C es el punto medio del segmento AB. La igualdad de estos triángulos implica que sus ángulos de vértice C, iguales y adyacentes, son rectos. El diámetro OC es perpendicular a la cuerda AB y la divide por la mitad. No existe otro diámetro perpendicular a la cuerda AB ya que desde el punto O se puede trazar sólo una recta perpendicular a la recta AB . Demostrado el Teorema.

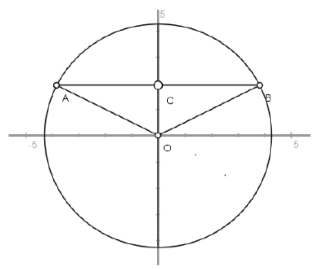


Imagen 8: Teorema 2 Pogorélov

Fuente: Carmona (2011)

2.3.5 Teorema (3 Pogorélov). Ninguna cuerda es mayor que el diámetro, y sólo puede ser igual si es diámetro. Aquí hablamos de el diámetro como el valor que es el doble del radio. Euclides III.15. Proposición 15. En un círculo el diámetro es la recta mayor y de las demás, la más próxima al centro es siempre mayor que la más lejana.

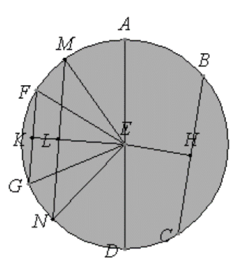


Imagen 9: Euclides Proposición 15

Fuente: Carmona (2011)

2.4 Tangente a una circunferencia

2.4.1 Definición. Una recta que corta a una circunferencia en exactamente un punto se llama tangente a la circunferencia por ese punto. Observar que esta definición difiere de la de Pogorélov. El próximo resultado muestra que la definición «clásica» de tangente es equivalente a la de Pogorélov.

2.4.2 Corolario Sean un punto de la circunferencia de centro O y l una recta por A . Entonces $l \perp OA$ si y sólo si l es tangente a la circunferencia por A. Euclides III.18 y III.19. Comparar con el teorema 11.4 en Pogorélov. Llamando c a la circunferencia y r a su radio, usamos 1.5 con $B \epsilon l$ tal que $dist(O,l) = OB$. Si $l \perp OA$, debe ser $A = B$, $dist(O,l) = OB = |OA| = r$ y hay un único punto en $c \cap l$ (que es A), i.e., l es tangente a c por A . Recíprocamente, si $l \perp OA$, entonces $dist(O,l) = OB < OA$ y l corta a c en dos puntos, por lo que no puede ser tangente.

2.4.3 Proposición 18: Si una recta toca a un círculo, y se dibuja una recta desde el centro hasta el punto de contacto, la recta dibujada será perpendicular a la tangente.

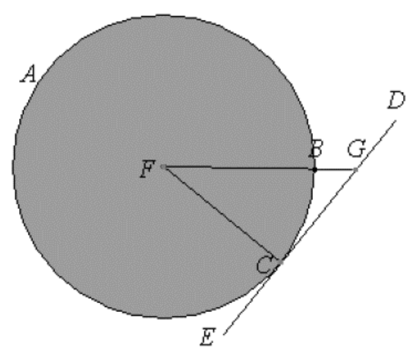


Imagen 10: Euclides Proposición 18.

Fuente: Carmona (2011)

2.4.4 Teorema 4 Pogorélov. Toda tangente tiene sólo un punto común con la circunferencia, el punto de tangencia. Demostración: Sea B otro punto cualquiera de la tangente diferente del punto de tangencia A (Imagen 11). Por su propiedad respectiva de perpendicular y de oblicua $OB > OA$, o sea, la distancia entre el punto B y el centro es mayor que el radio. El punto B no pertenece a la circunferencia. Demostrado el Teorema.

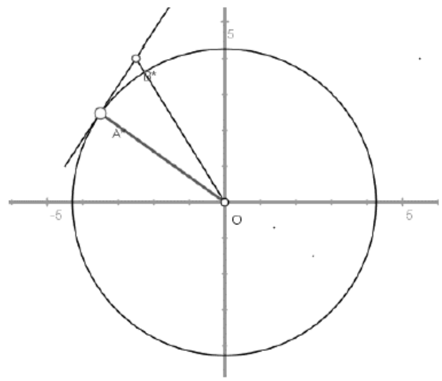


Imagen 11: Teorema 4 (Pogorélov).

Fuente: Carmona (2011)

2.4.5 Proposición 19. Si una recta toca a un círculo, y des del punto de contacto se dibuja una línea recta formando ángulos rectos con la tangente, el centro del círculo estará contenido en la recta dibujada.

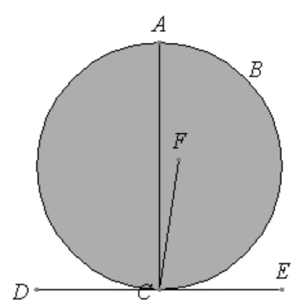


Imagen 12: Euclides Proposición 19.

Fuente: Carmona (2011)

2.4.6 TEOREMA 1. Toda recta del plano de una circunferencia, tangente a la circunferencia, es perpendicular al radio trazado al punto de tangencia. Imagen 13

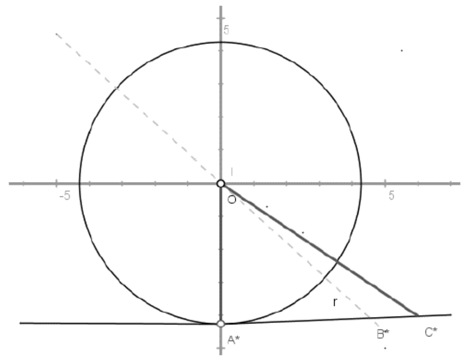


Imagen 13: TEOREMA 1, construcción en Regla y Compás.

Fuente: Carmona (2011)

Hipótesis: recta r, $C(O,r)$ del plano α, r tangente a la circunferencia en A., $\underline{OA}$ radio

Tesis $\underline{OA} \perp r$, Demostración: existen dos posibilidades:

1) $\underline{OA} \perp r$, 2) $\underline{OA}$ no es perpendicular a r , supongamos 2). existe una recta l que pasa por O y es perpendicular a r. Sea B el punto de intersección de las rectas l y r . Se toma un punto C sobre r al lado opuesto de A con respecto a B, tal que $\underline{BC} \cong \underline{AB}$.

1) $l \perp r$ Construcción

2) $\sphericalangle OBA \cong \sphericalangle OBC$ Rectos

3) $\underline{OB} \cong \underline{OB}$ Reflexiva

4) $AOB \cong COD$ Construcción

5) $\therefore \Delta AOB \cong \Delta COB$ Cateto-cateto

6) $\therefore OA \cong OC$ Elementos correspondientes de triángulos congruentes

Como $|OA| = r$, entonces $|\underline{OC}| = r$ y C está sobre la circunferencia y la recta r corta a la circunferencia en dos puntos (A y C) que va contra lo supuesto ya que la recta r es tangente a la circunferencia. Por lo tanto $\underline{OA} \perp r$.

2.4.7 Corolario: Si una recta que se encuentra en el plano de una circunferencia es perpendicular a una recta tangente a la circunferencia en el punto de tangencia, dicha recta pasa por el centro de la circunferencia.

2.4.7 TEOREMA 2. Si una recta, coplanaria con una circunferencia, es perpendicular a un radio en su extremo exterior, entonces la recta es tangente a la circunferencia.

2.4.8 TEOREMA 3. En una misma circunferencia o en circunferencias congruentes, si dos cuerdas son congruentes entonces los arcos menores subtendidos por ellas, son congruentes. Imagen 14.

Hipótesis: $\underline{AB}$ y $\underline{CD}$ cuerdas de $C(O,r)$, $\underline{AB} \cong \underline{CD}$

Tesis: $\underline{AB} \cong \underline{CD}$, Demostración: Se trazan los radios $\underline{OA},\ \underline{OB},\ \underline{OC}$ y $\underline{OD}$.

1). $\underline{OA} \cong \underline{OB} \cong \underline{OC} \cong \underline{OD}$ Radios de una misma circunferencia.

2). $\underline{AB} \cong \underline{CD}$ Hipótesis

3) $\Delta AOB \cong \Delta COB$ L-L-L de 1) y 2)

3) $\sphericalangle AOB \cong \sphericalangle COD$ Elementos correspondientes a triángulos congruentes

5) $\underline{AB} \cong \underline{CD}$ Teorema: Si dos ángulos centrales de una misma circunferencia o de circunferencias congruentes son congruentes, entonces sus arcos interceptados son congruentes.

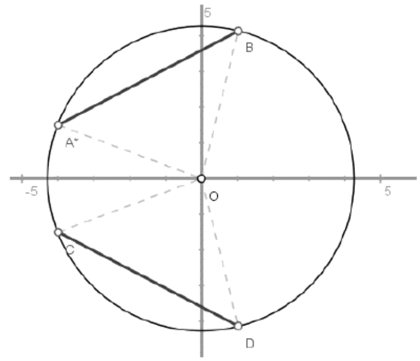


Imagen 14: TEOREMA 3, construcción en Regla y Compás.

Fuente: Carmona (2011)

2.4.9 TEOREMA 4: La recta que pasa por el centro de una circunferencia y es perpendicular a una cuerda, biseca la cuerda y los arcos subtendidos. Imagen 15.

Hipótesis: $\underline{AB}$ cuerda de $C(O,r)$, l recta que pasa por O, $l \perp \underline{AB}$ en C , D y E puntos de intersección de l con la circunferencia.,

Tesis:

$\underline{AC} \cong \underline{CB}$, $\underline{AD} \cong \underline{BD}$, $\underline{AE} \cong \underline{EB}$

, Demostración: Se trazan los radios $\underline{OA}$ y $\underline{OB}$

1) $\underline{OA} \cong \underline{OB}$ Radios de una misma circunferencia

2) $\sphericalangle ACC \sim \sphericalangle BCC$ Rectos por Hipótesis

3) $\underline{OC} \cong \underline{OC}$ Propiedad Reflexiva

4) $\Delta ACO \cong \Delta BOC$ L.A.L, de 1), 2) y 3)

5) $\therefore \underline{AC} \cong \underline{CB}$ Elementos correspondientes de triángulos congruentes

6) $\sphericalangle AOE \cong \sphericalangle BOE$ Elementos correspondientes de triángulos congruentes

7) $\underline{AE} \cong \underline{EB}$ Teorema: Si dos ángulos centrales de una misma circunferencia o de circunferencias congruentes son congruentes, entonces sus arcos interceptados son congruentes, y 6)

8) $\sphericalangle AOD \cong \sphericalangle BOD$ de 6) y suplemento de ángulos

9) $\underline{AD} \cong \underline{BD}$ Teorema: Si dos ángulos centrales de una misma circunferencia o de

circunferencias congruentes son congruentes, entonces sus arcos interceptados son congruentes, y 8).

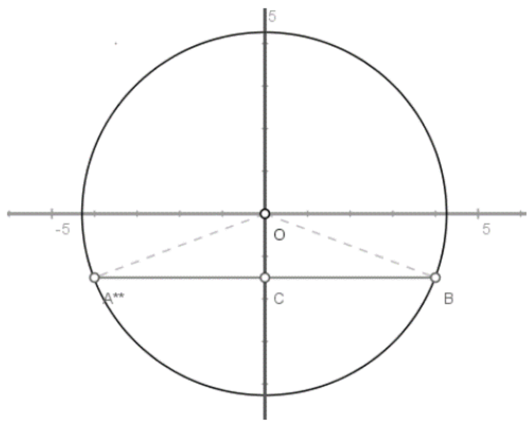


Imagen 15: TEOREMA 4, construcción en Regla y Compás.

Fuente: Carmona (2011)

2.4.10 TEOREMA 5: En una misma circunferencia o en circunferencias congruentes, cuerdas congruentes equidistan del centro. Imagen 16.

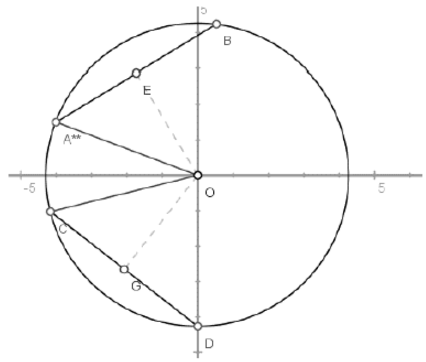


Imagen 16: TEOREMA 5, construcción con Regla y Compás.

Fuente: Carmona (2011)

Hipótesis: $\underline{AB}$ y $\underline{CD}$ cuerdas de $C(O,r)$, $\underline{AB} \cong \underline{CD}$, $\underline{OE} \perp \underline{AB}$, $\underline{OG} \perp \underline{CD}$

Tesis: $\underline{OE} \cong \underline{OG}$, Demostración: Se trazan los radios $\underline{OA}$ y $\underline{OC}$

1) $\underline{OA} \cong \underline{OC}$ Radios de la misma circunferencia

2) $\sphericalangle AEO \cong \sphericalangle CGO$ Rectos

3) $AE = EB = \frac{AB}{2}$

Teorema: La recta que pasa por el centro de una circunferencia y es perpendicular a una cuerda, biseca la cuerda y los arcos subtendidos.

4) Hipótesis. $\underline{AB} \cong \underline{CD}$

5) $\underline{AE} \cong \underline{CG}$ de 3) y 4)

6) $\Delta AEO \cong \Delta CGO$ L-A-L de 1), 2) y 5)

7) $\therefore$ $\underline{OE} \cong \underline{OG}$ Elementos correspondientes de triángulos congruentes.

2.4.11 TEOREMA 6: Los arcos de una misma circunferencia comprendidos entre rectas paralelas, son congruentes. Imagen 17

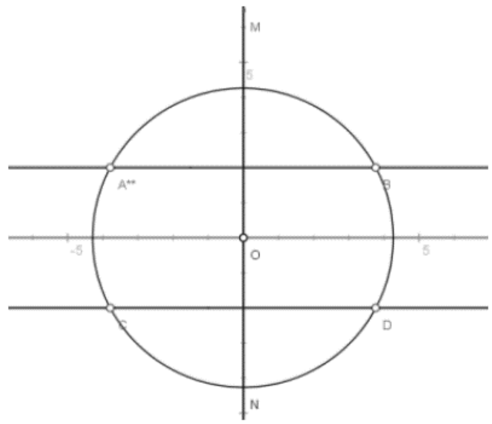


Imagen 17: TEOREMA 6, construcción con Regla y Compás.

Fuente: Carmona (2011)

Las rectas paralelas son secantes

Hipótesis: $AB^{\leftrightarrow}$ y $CD^{\leftrightarrow}$ secantes a la $C(O,r)$, $AB^{\leftrightarrow} \parallel CL^{\leftrightarrow}$, A, B, C y D puntos de la circunferencia.

Tesis: $\underline{AC} \cong \underline{BD}$, Demostración: Por O se traza $MN^{\leftrightarrow} \perp AB^{\leftrightarrow}$ (M,N puntos de la circunferencia)

1) $MN^{\leftrightarrow} \perp CD^{\leftrightarrow}$ Perpendiculares, Hipótesis.

2) $\underline{MC} \cong \underline{MD}$

Teorema: La recta que pasa por el centro de una circunferencia y es perpendicular a una cuerda, biseca la cuerda y los arcos.

3) $m(\underline{MC}) \cong m(\underline{MD})$ De 2), definición

4) $\underline{AM} \cong \underline{BM}$

Teorema: La recta que pasa por el centro de una circunferencia y es perpendicular a una cuerda, biseca la cuerda y los arcos subtendidos.

5) $m(\underline{AM}) \cong\ m(\underline{BM})$ De 4), definición

6) $m(\underline{AC}) \cong\ m(\underline{BD})$ De 3) Y 5), resta.

7) $\underline{AC} \cong \underline{BD}$ De 6)

II. Las rectas paralelas son una tangente y la otra secante: Hipótesis: $AB^{\leftrightarrow}$ secante y $ED^{\leftrightarrow}$ tangente (E punto de tangencia) de la $C(O,r)$, Tesis: $\underline{AE} \cong \underline{BE}$

II. Las rectas paralelas son dos tangentes: Hipótesis: $AB^{\leftrightarrow}$ y $ED^{\leftrightarrow}$ tangentes a la$C(O,r)$, A y D puntos de tangencia, Tesis: $\sphericalangle AMD\ \cong\ \sphericalangle AND$

2.5 Geometría Analítica

Definiciones

2.5.1 Definición n°1: (La circunferencia).

Es el conjunto de puntos (o lugar geométrico de los puntos) del plano que equidistan de un punto fijo en el mismo plano, al punto fijo se le llama el centro de la circunferencia y a la distancia de cada punto al centro se le llama radio de la circunferencia.

Notación: la circunferencia en el plano π y de centro en $O \in \pi$ y de radio r (Figura 2.13), se denota por $C(O,r)$, en la notación de conjuntos $C(O,r) = \{X \in \pi\ /\ OX = r, O, X \in \pi\}$

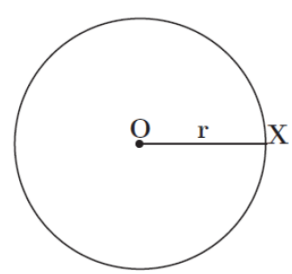


Imagen 18: La circunferencia

Fuente: Carmona (2011)

Como sucedió con la recta en el plano, que dividió el plano en dos regiones disjuntas, lo mismo sucede con la circunferencia, la cual nos divide el plano en dos regiones, una de ellas la llamamos el interior y la otra el exterior de la circunferencia.

2.5.2 Definición 2 (Interior de la Circunferencia). Al conjunto de puntos del plano de la circunferencia, tales que su distancia al centro es menor que el radio, se le llama el interior de la circunferencia. Notación: el interior de la circunferencia de centro O y radio r se denota por $IntC(O,r)$ por lo tanto $IntC(O,r) = \left\{X \epsilon \frac{\pi}{OX} < r, O, X \epsilon \pi\right\}$

2.5.3 Definición 3 (Exterior de la Circunferencia). Al conjunto de puntos del plano de la circunferencia, tales que su distancia al centro es mayor que el radio, se le llama el exterior de la circunferencia. Notación: el exterior de la circunferencia de centro O y radio r se denota por $ExtC(O,r)$, por lo tanto $ExtC(O,r) = \left\{X \epsilon \frac{\pi}{OX} > r, O, X \epsilon \pi\right\}$

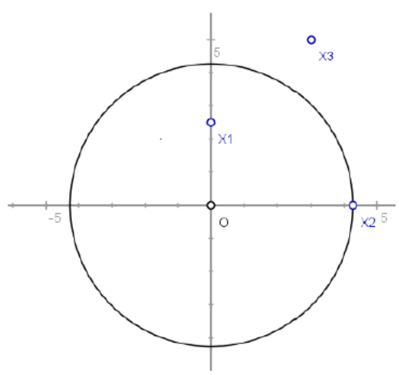


Imagen 19: Exterior de la Circunferencia

Fuente: Carmona (2011)

En la Figura 6.14 los puntos X_1, X_2 , X_3 están en el mismo plano de la $C(O,r)$. Como $OX_1 < r$ entonces $X_1 \in IntC(O,r)$, Como $OX_3 > r$ entonces $X_1 \epsilon ExtC(O,r)$. Como $OX_2 = r$ entonces $X_1 \in C(O,r)$.

2.5.4 Definición 4 (Círculo). La unión de la circunferencia y su interior la llamamos círculo. Notación: el círculo de centro O y radio r se denota por $C(O,r)$, por lo tanto $C(O,r) = C(O,r) \cup IntC(O,r)$.

2.5.5 Definición 5 (Cuerda). Es un segmento cuyos extremos son dos puntos diferentes de la circunferencia. Cuando el centro de la circunferencia es un punto interior de la cuerda, entonces a la cuerda la llamamos cuerda diametral y a su medida la llamamos diámetro. Por la definición de circunferencia, podemos concluir que el diámetro es dos veces el radio.

2.5.6 Definición 6 (Secante). La recta que intercepta la circunferencia en al menos dos puntos distintos se le llama secante.

2.5.7 Definición 7 (Tangente). Si una recta en el plano de la circunferencia la intercepta en un único punto, entonces decimos que la recta es tangente a la circunferencia; al punto de contacto entre la recta y la circunferencia se le llama punto de tangencia.

Nota: en tres dimensiones puede ocurrir que la recta intercepta la circunferencia en un único punto y la recta no ser tangente a la circunferencia.

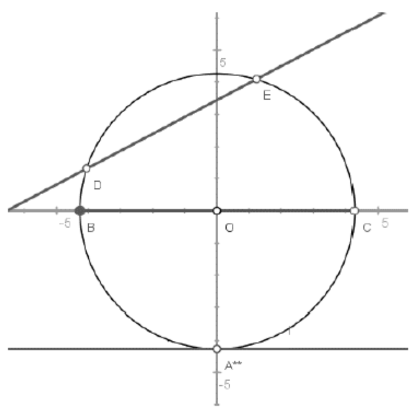


Imagen 20: Tangente de la Circunferencia

Fuente: Carmona (2011)

En la Imagen 20 se puede ver que: l es tangente a la circunferencia $C(O,r)$ en A. La cuerda $\underline{BC}$ es diámetro. La recta $\underline{DE}$ es secante a la circunferencia.

2.5.8 Definición 8 (Arco). Dados dos puntos distintos de una circunferencia entonces la circunferencia queda dividida en dos conjuntos a los cuales llamaremos arcos.

Notación: si los puntos son A y B (Imagen 21), los arcos son arco AMB y arco ANB, los cuales denotamos por $\sphericalangle AMB$ y $\sphericalangle ANB$ y como la cuerda $\underline{AB}$ está asociada a cada uno de estos arcos entonces decimos que el arco $\sphericalangle AMB$ (o el arco $\sphericalangle ANB$) está sub-tendido por la cuerda $\underline{AB}$ o que la cuerda $\underline{AB}$ sub-tiende al arco $\sphericalangle AMB$ (o al arco $\sphericalangle AMB$). A los puntos A, B se les llama los extremos del arco. Si al arco le quitamos los extremos, a este nuevo conjunto lo llamamos el Interior del arco y lo denotamos por $Int(\sphericalangle AMB)$.

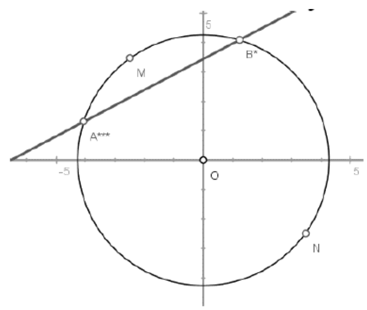


Imagen 21: Arco de la Circunferencia

Fuente: Carmona (2011)

2.5.9 Definición 9. Arco Principal: si el centro de la circunferencia y el Interior del arco están en semiplanos opuestos con respecto a la recta que pasa por los extremos del arco, a este arco lo llamamos arco principal.

CAPÍTULO 3: METODOLOGÍA

3.1 Tipo de investigación

La presente investigación tiene un enfoque de análisis cualitativo de la información, dado que, en relación con un conjunto de técnicas, se extraen distintas conclusiones de datos de manera narrativa, observando imágenes o tareas propuestas. (Cáceres,2020).

3.1.1 Análisis descriptivo

En la investigación con alcance descriptivo de tipo cualitativo, se busca realizar estudios de tipo fenomenológicos o narrativos constructivistas, que busquen describir las representaciones subjetivas que emergen en un grupo determinado de estudio. (Lahitte, 2013)

Es este trabajo se realizó un análisis bibliográfico de textos y programas establecidos por el ministerio de educación de Chile, relacionados a al texto del estudiante, cuaderno de actividades y programa de estudio en 7° básico en matemática.

3.2 Progresiones de objetivos de aprendizaje en matemática 7° a 4to medio, relacionados al círculo y circunferencia.

El currículum chileno está determinado por una serie de objetivos de aprendizajes que se definen en las bases curriculares, en la tabla 2 se muestra las progresiones curriculares, asociadas a ejes, programas y objetivos.

Tabla 2: Progresiones Curriculares

Nivel	Objetivo de aprendizaje 1	Objetivo de aprendizaje 2
7mo básico	OA11: Mostrar que comprenden el círculo: •Describiendo las relaciones entre el radio, el diámetro y el perímetro del círculo •Estimando de manera intuitiva el perímetro y el área de un círculo •Aplicando las aproximaciones del perímetro y del área en la resolución de problemas geométricos de otras asignaturas y de la vida diaria •Identificándose como lugar geométrico	OA12: Construir objetos geométricos de manera manual y/o con software educativo: •Líneas, como las perpendiculares, las paralelas, las bisectrices y alturas en triángulos y cuadriláteros •Puntos, como el punto medio, el centro de gravedad, el centro del círculo inscrito y del circunscrito de un triángulo •Triángulos y cuadriláteros congruentes
8vo básico	OA11: Desarrollar las fórmulas para encontrar el área de superficies y el volumen de prismas rectos con diferentes bases y cilindros:	OA13: Describir la posición y el movimiento (traslaciones, rotaciones y reflexiones) de figuras 2D, de manera manual y/o con software educativo, utilizando:

	•Estimando de manera intuitiva área de superficie y volumen •Desplegando la red de prismas rectos para encontrar la fórmula del área de superficie •Transfiriendo la fórmula del volumen de un cubo (base por altura) en prismas diversos y cilindros •Aplicando las fórmulas a la resolución de problemas geométricos y de la vida diaria	•Los vectores para la traslación •Los ejes del plano cartesiano como ejes de reflexión •Los puntos del plano para las rotaciones
1° Medio	OA6: Desarrollar la fórmula de los valores del área y del perímetro de sectores y segmentos circulares respectivamente, a partir de ángulos centrales de 60°, 90°, 120° y 180°, por medio de representaciones concretas.	OA7: Desarrollar las fórmulas para encontrar el área de la superficie y el volumen del cono: •Desplegando la red del cono para la fórmula del área de superficie •Experimentando de manera concreta para encontrar la relación entre el volumen del cilindro y el cono

		•Aplicando las fórmulas a la resolución de problemas geométricos y de la vida diaria
2do medio	OA7: Desarrollar las fórmulas del área de la superficie y del volumen de la esfera: •Conjeturando la fórmula •Representando de manera concreta y simbólica, de manera manual y/o con software educativo •Resolviendo problemas de la vida diaria y de geometría	
3ero medio	OA 4: Resolver problemas de geometría euclidiana que involucran relaciones métricas entre ángulos, arcos, cuerdas y secantes en la circunferencia, de forma manuscrita y con uso de herramientas tecnológicas.	
4to Medio	OA 4: Resolver problemas acerca de rectas y	

	circunferencias en el plano, mediante su representación analítica, de forma manuscrita y con uso de herramientas tecnológicas	

Fuente: Mineduc

A continuación, en la imagen 22 se observa la progresión de objetivos de aprendizaje, relacionado al contenido del círculo en enseñanza media abarcado en el currículum chileno. (Mineduc, 2020)

Imagen 22: Progresión de objetivos de aprendizaje relacionados al Círculo

Fuente: Mineduc

Se puede observar en la imagen 22 la presencia de los objetivos relacionados al objeto matemático del círculo y circunferencia, que los primeros niveles de enseñanza media 7º básico (12 años), 8º y 1º se otorgan 2 objetivos de aprendizaje, mientras que en los niveles superiores (2º, 3º y 4º) baja a uno, sin embargo, es importante considerar que en dichos niveles existen cursos de profundización por la información expuesta representa solo el currículum obligatorio.

3.3 Textos seleccionados para el análisis

- Texto del estudiante 7° Básico Matemática
- Cuaderno de actividades 7° Básico Matemática

3.3.1 Texto de estudio

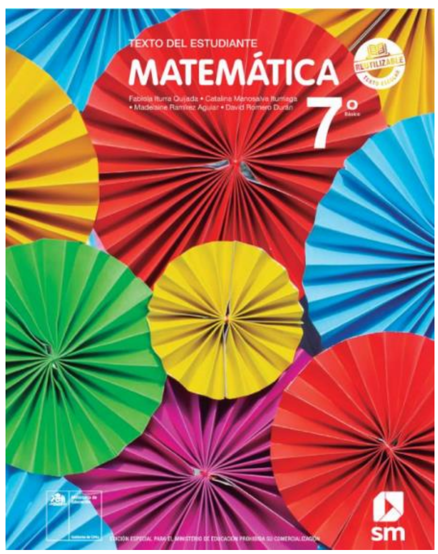


Imagen 23: Texto del estudiante 7° Básico Matemática

Fuente: Ministerio de Educación

Tabla 3: Especificaciones texto de estudio

Libro	Texto del estudiante 7° Básico Matemática
Autores	Fabiola Iturra Quijada Catalina Manosalva Iturriaga Madelaine Ramírez Aguiar David Romero Durán
Editorial	SM (Societas Mariae)
ISBN	978-956-363-726-7
Año	2019
Unidad	N° 3 Geometría
Contenido	**Lección 12**: Círculo y circunferencia (Páginas 132 – 138) Tema 1: Círculo y circunferencia Tema 2: Perímetro y del círculo Tema 3: Área del círculo

Fuente: Elaboración Propia

3.3.2 Cuaderno de actividades

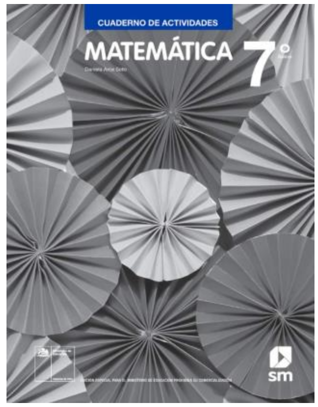


Imagen 24: Cuaderno de actividades 7° Básico Matemática

Fuente: Ministerio de Educación

Tabla 4: Especificaciones Cuaderno de actividades

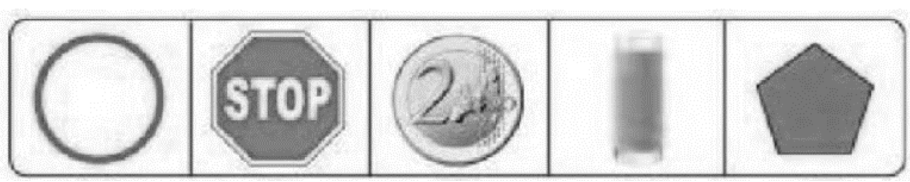
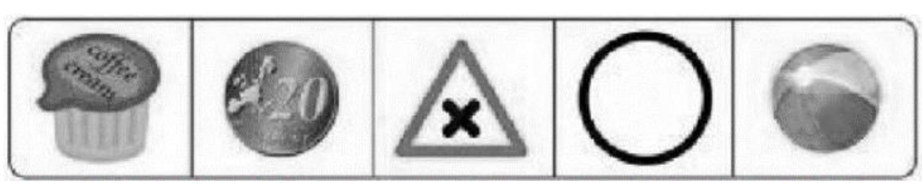
Libro	Cuaderno de actividades 7° Básico Matemática
Autores	Daniela Arce Soto
Editorial	SM (Societas Mariae)
ISBN	978-956-363-727-4
Año	2019
Unidad	N° 3 Geometría
Contenido	**Lección 12**: Círculo y circunferencia (Páginas 73 – 76) Tema 1: Círculo y circunferencia Tema 2: Perímetro y del círculo Tema 3: Área del círculo

Fuente: Elaboración Propia

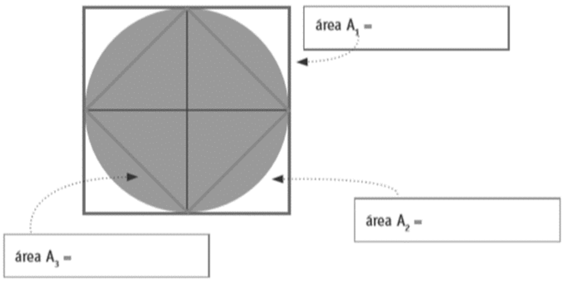
3.4 Ejemplo Tipo de Tareas relacionadas al círculo y circunferencia

A continuación, en la tabla 5, se presenta diferentes tipos de ejemplos de tareas relacionados a los niveles de Van Hiele.

Tabla 5: Ejemplo de tipos de tareas, asociadas a los niveles de Van Hiele

Nivel de Van Hiele	Ejemplo de tipo de tareas
Nivel 1: Reconocimiento y Percepción	Los estudiantes perciben el objeto de circunferencia y círculo en relación con su percepción física, infiriendo en relación con su forma. Ejemplo: a) ¿Cuál de estos objetos en un círculo?  b. ¿Cuál de estos objetos en una circunferencia? 

<table>
<tr>
<td>Nivel 2: Análisis</td>
<td>
Los estudiantes analizan las partes y las principales propiedades de la circunferencia y el círculo.
Ejemplo
1. Observa la situación y realiza las actividades propuestas.

Calcular el perímetro de figuras de lados rectos es algo que vienes practicando desde hace algunos años. Sin embargo, para calcular el perímetro de un círculo, tendremos que utilizar otra estrategia.
Materiales
- 4 objetos en los que se observe un círculo
- Lana
- Regla
- Tijeras
a. Sigue los pasos para calcular el perímetro de un círculo.
Paso 1: Mide el diámetro de uno de los objetos solicitados en los materiales utilizando la regla. Asegúrate de que la medida pase por el centro del círculo.
Paso 2: Con la lana, mide el contorno de los objetos (longitud de la circunferencia) y córtala según la medida.
Paso 3: Mide la longitud de la lana cortada con una regla.
Paso 4: Repite el proceso con los otros 3 objetos.
b. Completa la tabla en tu cuaderno. Utiliza calculadora de ser necesario.
<table>
<tr><th>Objeto</th><th>Diámetro (d)</th><th>Contorno de la circunferencia (P)</th><th>$P : d$</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>
c. Analiza y describe la relación que existe entre los cocientes. ¿A qué número es cercano?
</td>
</tr>
<tr>
<td>Nivel 3: Clasificación</td>
<td>
Los estudiantes relacionan lógicamente el círculo y circunferencia con relación a sus diferentes propiedades.
Ejemplo:
Estiman el área de un círculo en comparación con el cuadrado inscrito y circunscrito.
› Dibujan el cuadrado circunscrito con el lado a = 6 cm y lo subdividen en cuatro cuadrados con el lado r = 3 cm. Unen los puntos medios de los lados del cuadrado circunscrito, resultando el cuadrado inscrito.
› Reconocen que el cuadrado circunscrito tiene el área de $4r^2$ y que el área del cuadrado inscrito mide $2r^2$.
› Dibujan el círculo entre ambos cuadrados y estiman su área en comparación con el área del cuadrado inscrito y del cuadrado circunscrito.


</td>
</tr>
</table>

Nivel 4: Deducción Formal	Los estudiantes adquieren habilidades de razonamiento matemático, en relación con demostraciones formales, asociándolos a figuras geométricas. Ejemplo: Desde un punto fijo de una circunferencia se trazan cuerdas. Demostrar que el L.G. de los puntos medios de estas cuerdas es una circunferencia.

Fuente: Elaboración Propia

Dentro de la revisión de textos, se van a analizar todas las tareas propuestas en relación con el círculo y circunferencia.

3.5 Formato de análisis de las tareas propuestas

En cada texto de estudio se tomarán las tareas propuestas, y se identificarán lo siguientes elementos asociados:

- N° de página.
- Objetivo de aprendizaje.
- Elementos identificados: radio, área, cuerda, etc que fueron descritos en el apartado tanto del marco teórico definiciones y teoremas de la circunferencia y circulo
- Identificar el nivel de la tarea según la descripción entregada en el marco teórico en el apartado n°2.1 con sus respectivos comentarios.
- Comentarios generales

En relación con lo anterior cada actividad asociada a los elementos se resumirán en la siguiente tabla n°6

Tabla 6: descripción de actividades

Página	
Objetivo de la actividad	
Elementos que moviliza	
Nivel en la que se clasifica	
Observaciones	

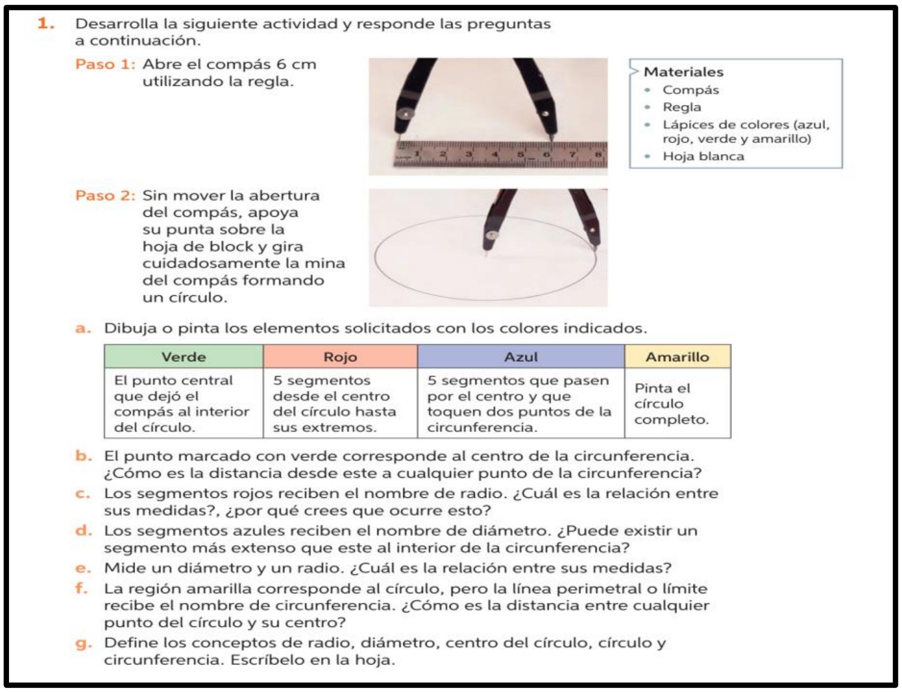
Fuente: Elaboración propia

CAPÍTULO 4: ANÁLISIS Y/O RESULTADOS

A continuación, se realiza en análisis de todas las tareas propuestas en los textos de estudio de 7° básico relacionada al círculo y circunferencia.

ACTIVIDADES PROPUESTAS DEL MINISTERIO EN EL TEXTO DEL ESTUDIANTE

4.1.1 Círculo y circunferencia:



1. Desarrolla la siguiente actividad y responde las preguntas a continuación.

Paso 1: Abre el compás 6 cm utilizando la regla.

Paso 2: Sin mover la abertura del compás, apoya su punta sobre la hoja de block y gira cuidadosamente la mina del compás formando un círculo.

Materiales
- Compás
- Regla
- Lápices de colores (azul, rojo, verde y amarillo)
- Hoja blanca

a. Dibuja o pinta los elementos solicitados con los colores indicados.

Verde	Rojo	Azul	Amarillo
El punto central que dejó el compás al interior del círculo.	5 segmentos desde el centro del círculo hasta sus extremos.	5 segmentos que pasen por el centro y que toquen dos puntos de la circunferencia.	Pinta el círculo completo.

b. El punto marcado con verde corresponde al centro de la circunferencia. ¿Cómo es la distancia desde este a cualquier punto de la circunferencia?

c. Los segmentos rojos reciben el nombre de radio. ¿Cuál es la relación entre sus medidas?, ¿por qué crees que ocurre esto?

d. Los segmentos azules reciben el nombre de diámetro. ¿Puede existir un segmento más extenso que este al interior de la circunferencia?

e. Mide un diámetro y un radio. ¿Cuál es la relación entre sus medidas?

f. La región amarilla corresponde al círculo, pero la línea perimetral o límite recibe el nombre de circunferencia. ¿Cómo es la distancia entre cualquier punto del círculo y su centro?

g. Define los conceptos de radio, diámetro, centro del círculo, círculo y circunferencia. Escríbelo en la hoja.

Imagen 25: Ejercicio Texto del estudiante 7° Básico

Fuente: Texto del estudiante 7° Básico Ministerio de Educación

Tabla 7: análisis de tarea

ANÁLISIS	
Página	132
Objetivo de la actividad	Dibujar circunferencias utilizando compás
Elementos que moviliza	segmentos, radio, diámetro
Nivel en la que se clasifica	Nivel 1: Reconocimiento o percepción Nivel 2: Análisis Se presenta un ejemplo de tarea que moviliza el nivel 1 ya que los estudiantes pueden percibir figuras geométricas como un todo e incluir atributos en su descripción, también de nivel 2 dado que los estudiantes pueden descubrir y generalizar propiedades basadas en la observación y la manipulación.
Observaciones	identificar elementos de círculo

Fuente: Elaboración propia

4.1.2 Perímetro del círculo:

1. Observa la situación y realiza las actividades propuestas.

Calcular el perímetro de figuras de lados rectos es algo que vienes practicando desde hace algunos años. Sin embargo, para calcular el perímetro de un círculo, tendremos que utilizar otra estrategia.

Materiales
- 4 objetos en los que se observe un círculo
- Lana
- Regla
- Tijeras

a. Sigue los pasos para calcular el perímetro de un círculo.

Paso 1: Mide el diámetro de uno de los objetos solicitados en los materiales utilizando la regla. Asegúrate de que la medida pase por el centro del círculo.

Paso 2: Con la lana, mide el contorno de los objetos (longitud de la circunferencia) y córtala según la medida.

Paso 3: Mide la longitud de la lana cortada con una regla.

Paso 4: Repite el proceso con los otros 3 objetos.

b. Completa la tabla en tu cuaderno. Utiliza calculadora de ser necesario.

Objeto	Diámetro (*d*)	Contorno de la circunferencia (*P*)	$P : d$

c. Analiza y describe la relación que existe entre los cocientes. ¿A qué número es cercano?

Imagen 26: Ejercicio Texto del estudiante 7° Básico

Fuente: Texto del estudiante 7° Básico Ministerio de Educación

Tabla 8: análisis de tarea

ANÁLISIS	
Página	134
Objetivo de la actividad	Calcular perímetro de una circunferencia
Elementos que moviliza	Perímetro, Diámetro, longitud.
Nivel en la que se clasifica	Nivel 2: Análisis Nivel 3: Clasificación Se presenta un ejemplo de tarea que moviliza el nivel 2 ya que los estudiantes pueden descubrir y generalizar propiedades basadas en la observación y la manipulación, y por último de nivel 3 ya que les permite relacionar lógicamente diferentes propiedades de este o diferentes figuras.
Observaciones	A través de la identificación de elementos concretos, los estudiantes determinan los pasos para calcular el perímetro.

Fuente: Elaboración propia

4.1.3 Área del círculo:

Área del círculo

Objetivo: Estimar y determinar el área y elementos de círculos en diversos contextos.

¿En qué situaciones podría ser importante saber calcular el área de un círculo? Menciona 3.

1. El profesor entrega a sus estudiantes las siguientes figuras en una lámina y les solicita que reflexionen cómo pueden estimar el área de los círculos de las imágenes.

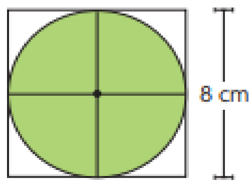


Figura 1

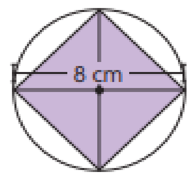


Figura 2

Observa lo realizado por dos estudiantes y responde las preguntas.

Paso 1: Recortamos los triángulos inferiores de la figura 2, en los que se divide el cuadrado inscrito en la circunferencia (dibujado al interior de esta). Luego, los superpusimos, como muestra la figura 3.

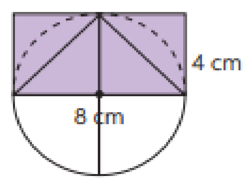


Figura 3

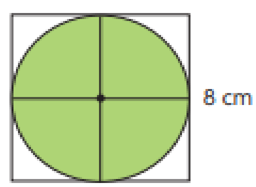
a. ¿Qué figura se formó?

b. ¿Cuál es el área de esta figura?

c. ¿Es menor o mayor que el área del círculo?

d. ¿A qué partes del círculo corresponden las medidas explicitadas en la imagen?

Paso 2: Posteriormente, calculamos el área del cuadrado de lado 8 cm y estimamos el área del círculo.



e. ¿Cuál es el área del cuadrado circunscrito (exterior al círculo)?

f. ¿Es menor o mayor que el área del círculo?

Imagen 27: Ejercicio Texto del estudiante 7° Básico

Fuente: Texto del estudiante 7° Básico Ministerio de Educación

Tabla 9: análisis de tarea

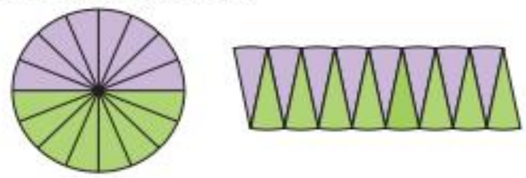
ANÁLISIS	
Página	138
Objetivo de la actividad	Estimar y determinar el área y elementos de círculos
Elementos que moviliza	Área, cuadrado inscrito y circunscrito
Nivel en la que se clasifica	Nivel 2: Análisis Nivel 3: Clasificación Se presenta un ejemplo de tarea que moviliza el nivel 2 ya que los estudiantes pueden descubrir y generalizar propiedades basadas en la observación y la manipulación, y por último de nivel 3 ya que les permite relacionar lógicamente diferentes propiedades de este o diferentes figuras.
Observaciones	A través de la construcción de una figura geométrica de forma cuadrada se estima el área del círculo.

Fuente: Elaboración propia

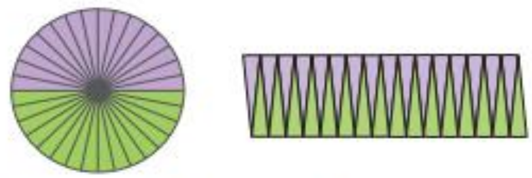
4.1.4 Relación de figuras

3. Otra pareja de estudiantes estima el área del círculo utilizando otra estrategia. Analiza y responde.

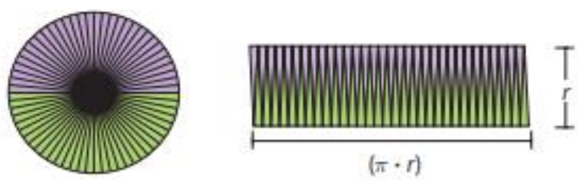
Paso 1: Primero, dividen el círculo en 16 secciones iguales y las ubican una al lado de la otra.



Paso 2: Luego, dividen un círculo idéntico en 32 partes iguales y nuevamente colocan las secciones una al lado de la otra.



Paso 3: Ven que mientras más divisiones hacen, más pequeñas resultan estas. Además, al unirlas, la figura se parece cada vez más a un rectángulo, cuya base corresponde a la mitad del perímetro y su altura es igual al radio del círculo (r).



Paso 4: Deducen que, como la figura se parece a un rectángulo, se puede estimar el área del círculo calculando el área del rectángulo.

a. ¿Cuál es la base del rectángulo formado con el círculo?

b. ¿A qué elemento del círculo corresponde la altura del rectángulo?

c. Plantea la fórmula para el cálculo del área del rectángulo con los elementos del círculo.

Imagen 28: Ejercicio Texto del estudiante 7° Básico

Fuente: Texto del estudiante 7° Básico Ministerio de Educación

Tabla 10: análisis de tarea

ANÁLISIS	
Página	139
Objetivo de la actividad	Estimar y determinar el área y elementos de círculos
Elementos que moviliza	División, rectángulo, radio, área.
Nivel en la que se clasifica	Nivel 2: Análisis Nivel 3: Clasificación Se presenta un ejemplo de tarea que moviliza el nivel 2 ya que los estudiantes pueden descubrir y generalizar propiedades basadas en la observación y la manipulación, y por último de nivel 3 ya que les permite relacionar lógicamente diferentes propiedades de este o diferentes figuras.
Observaciones	A través de dividir un círculo en muchos segmentos, y al unirlas de forma un rectángulo cuya base corresponde a la mitad del perímetro y su altura es igual al radio del círculo (r).

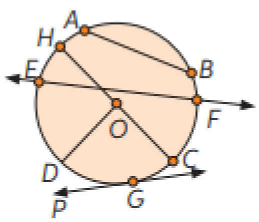
Fuente: Elaboración propia

ACTIVIDADES PROPUESTAS POR EL MINISTERIO EN EL CUADERNO DE ACTIVIDADES.

4.2.1 Círculo y circunferencia:

Círculo y circunferencia

1. Identifica un radio y un diámetro de la circunferencia.



radio =

diámetro =

2. Escribe V si la afirmación es verdadera o F si es falsa.

   a. ______ Si dos circunferencias tienen el mismo centro son iguales.

   b. ______ Un círculo es el lugar geométrico de todos los puntos del plano que están a la misma distancia de un punto fijo llamado centro.

   c. ______ Dos puntos de una circunferencia de centro *O* están a la misma distancia de *O*.

   d. ______ Si dos circunferencias tienen el mismo radio, son congruentes.

   e. ______ El radio siempre tendrá una medida mayor que el diámetro.

3. Resuelve los siguientes problemas. Justifica con tu desarrollo.

   a. Patricio dice que dos circunferencias cualesquiera se pueden intersecar en exactamente dos puntos. Romina, en cambio, dice que pueden intersecarse en infinitos puntos. ¿Quién tiene razón? ¿Por qué?

Imagen 29: Tarea Cuaderno de actividades 7° Básico

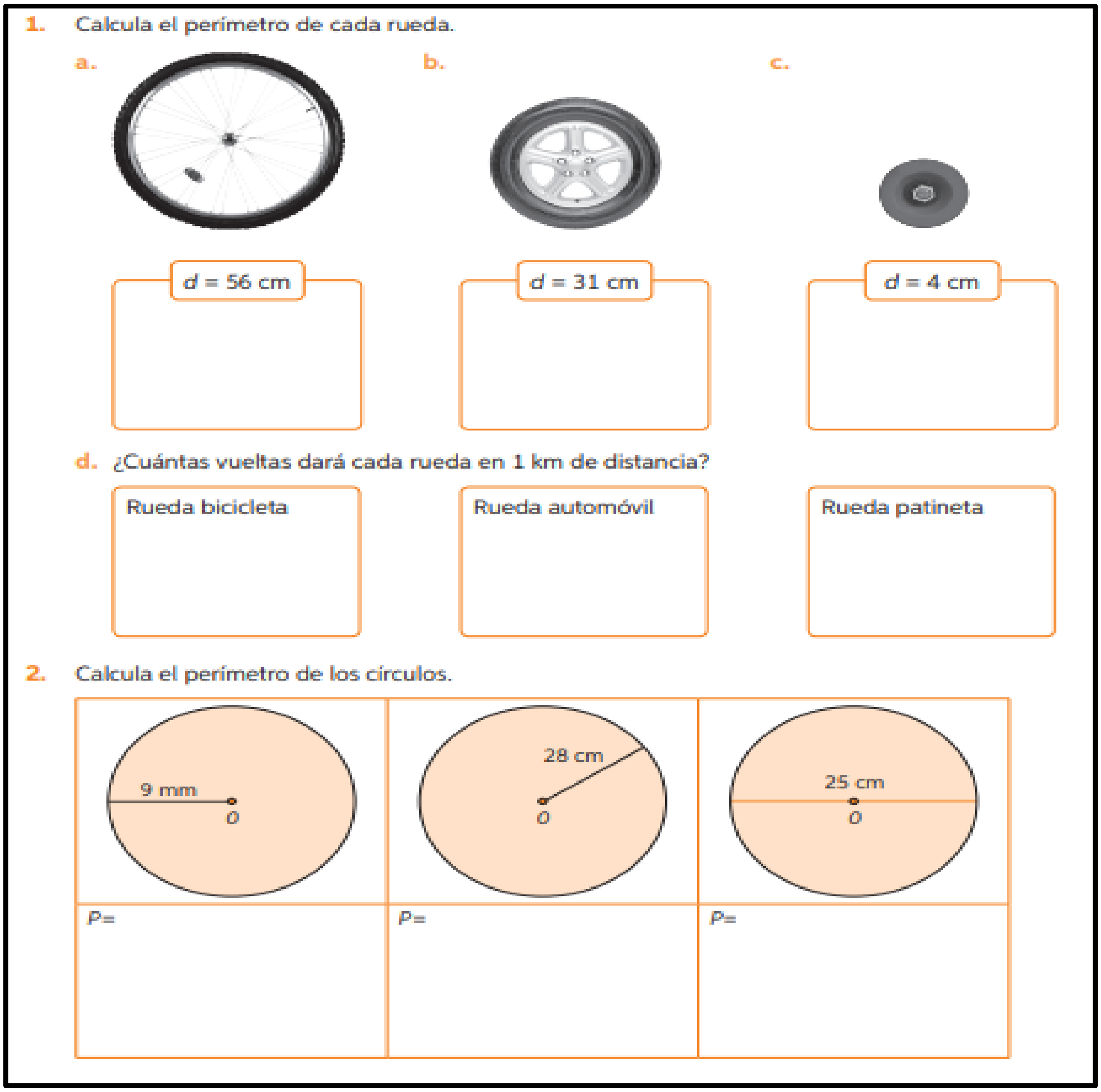
Fuente: Texto del estudiante 7° Básico Ministerio de Educación

Tabla 11: análisis de tarea

ANÁLISIS	
Página	73
Objetivo de la actividad	Identificar elementos del círculo y la circunferencia
Elementos que moviliza	Círculo, circunferencia, diámetro, radio
Nivel que se clasifica	Nivel 2: Análisis Nivel 3: Clasificación Se presenta un ejemplo de tarea que moviliza el nivel 2 ya que los estudiantes pueden descubrir y generalizar propiedades basadas en la observación y la manipulación, y por último de nivel 3 ya que les permite relacionar lógicamente diferentes propiedades de este o diferentes figuras.
Observaciones	Se identifican elementos del círculo con afirmaciones y respuestas

Fuente: Elaboración propia

4.2.2 Perímetro del círculo:



1. Calcula el perímetro de cada rueda.

a. $d = 56$ cm

b. $d = 31$ cm

c. $d = 4$ cm

d. ¿Cuántas vueltas dará cada rueda en 1 km de distancia?

Rueda bicicleta

Rueda automóvil

Rueda patineta

2. Calcula el perímetro de los círculos.

P=

P=

P=

Imagen 30: Tarea Cuaderno de actividades 7° Básico

Fuente: Texto del estudiante 7° Básico Ministerio de Educación

Tabla 12: análisis de tarea

ANÁLISIS	
Página	74
Objetivo de la actividad	Calcular perímetro
Elementos que moviliza	Perímetro, diámetro, radio, longitud
Nivel que se clasifica	Nivel 2: Análisis Nivel 3: Clasificación Se presenta un ejemplo de tarea que moviliza el nivel 2 ya que los estudiantes pueden descubrir y generalizar propiedades basadas en la observación y la manipulación, y por último de nivel 3 ya que les permite relacionar lógicamente diferentes propiedades de este o diferentes figuras.
Observaciones	Se identifican elementos del círculo y en base a estos se calculan perímetros del círculo.

Fuente: Elaboración propia

4.2.3 ejemplos de contexto

3. Analiza y responde.

   a. Si se duplica la medida del radio de una circunferencia, ¿qué sucede con el perímetro?

   b. Si se duplica la medida del diámetro de una circunferencia, ¿qué sucede con su perímetro?

   c. Si el perímetro de un círculo es 10π cm, ¿cuál es su radio?

4. Resuelve los problemas. Justifica tu respuesta con el desarrollo paso a paso.

   a. Marcela confecciona collares. Si la longitud debe ser de 90 cm, ¿cuánto medirá el radio de la circunferencia que se forma al cerrar el collar?

   b. En una piscina circular se desea colocar una reja. Si la piscina tiene 8 m de diámetro, ¿cuántos metros de reja se deben comprar?

   c. El círculo central de una cancha de fútbol mide 9,5 m de radio. ¿Cuánto mide su contorno?

Imagen 31: Tarea Cuaderno de actividades 7° Básico

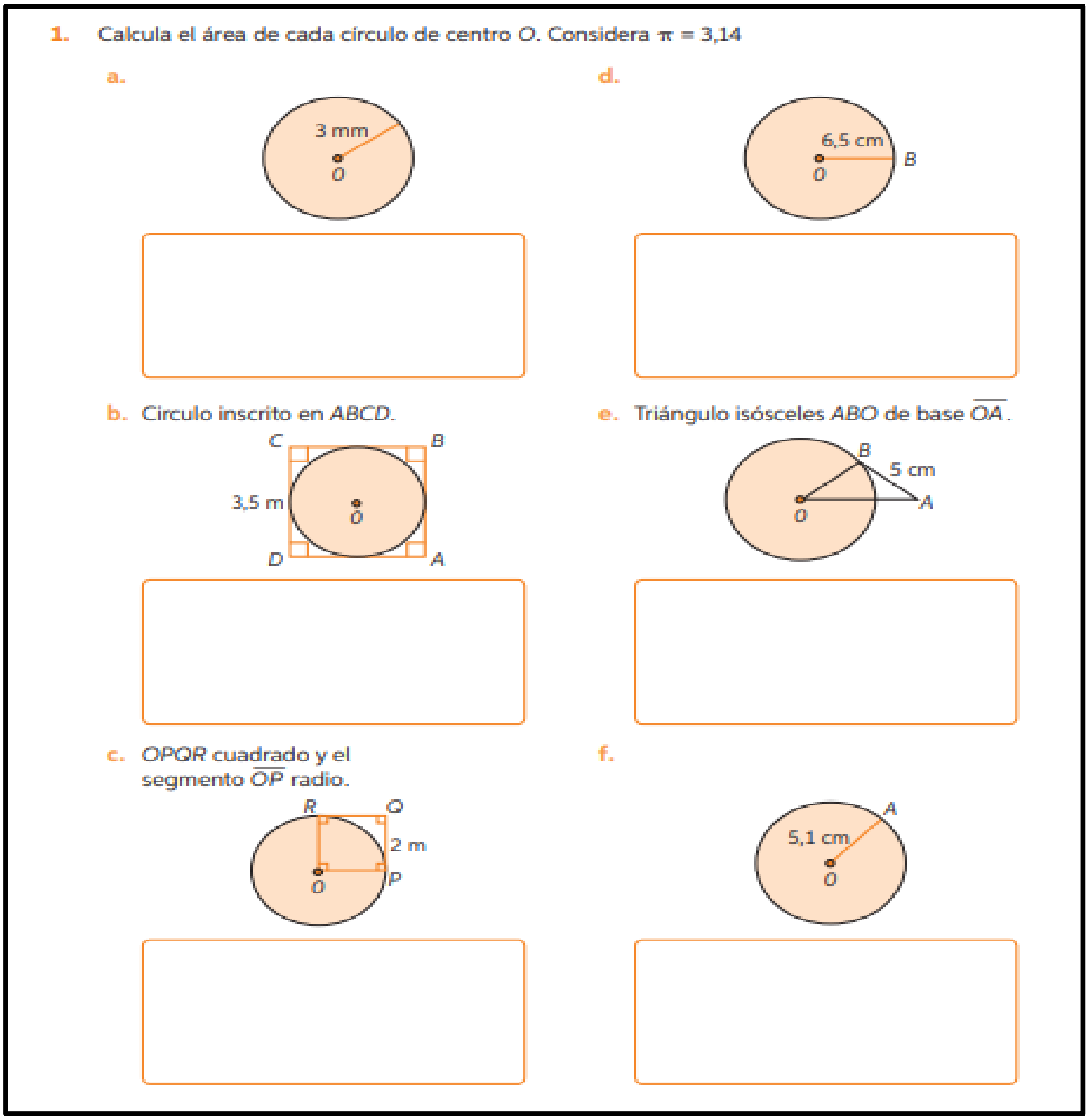
Fuente: Texto del estudiante 7° Básico Ministerio de Educación

Tabla 13: análisis de tarea

ANÁLISIS	
Página	75
Objetivo de la actividad	Analizar y resolver
Elementos que moviliza	Perímetro, diámetro, radio, longitud, circunferencia
Nivel en la que se clasifica	Nivel 2: Análisis Nivel 3: Clasificación Se presenta un ejemplo de tarea que moviliza el nivel 2 ya que los estudiantes pueden descubrir y generalizar propiedades basadas en la observación y la manipulación, y por último de nivel 3 ya que les permite relacionar lógicamente diferentes propiedades de este o diferentes figuras.
Observaciones	Se presentan diversas situaciones, en las cuales se debe estimar perímetros, radios.

Fuente: Elaboración propia

4.2.4 Área del círculo:



1. Calcula el área de cada círculo de centro O. Considera $\pi = 3{,}14$

a.

d.

b. Círculo inscrito en $ABCD$.

e. Triángulo isósceles ABO de base $\overline{OA}$.

c. $OPQR$ cuadrado y el segmento $\overline{OP}$ radio.

f.

Imagen 32: Tarea Cuaderno de actividades 7° Básico

Fuente: Texto del estudiante 7° Básico Ministerio de Educación

Tabla 14: análisis de tarea

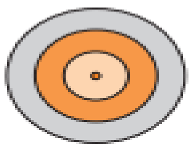
ANÁLISIS	
Página	75
Objetivo de la actividad	Analizar y resolver
Elementos que moviliza	Perímetro, diámetro, radio, longitud, circunferencia
Nivel que se clasifica	Nivel 2: Análisis Nivel 3: Clasificación Se presenta un ejemplo de tarea que moviliza el nivel 2 ya que los estudiantes pueden descubrir y generalizar propiedades basadas en la observación y la manipulación, y por último de nivel 3 ya que les permite relacionar lógicamente diferentes propiedades de este o diferentes figuras.
Observaciones	Se presentan diversas situaciones, en las cuales se debe estimar perímetros y radios.

Fuente: Elaboración propia

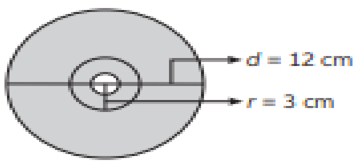
4.2.5 Ejercicios de contexto

2. Resuelve los problemas. Justifica tu respuesta con el desarrollo paso a paso.

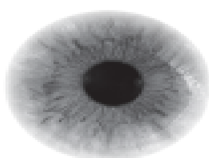
a. Nelson construyó un blanco de tiro, como el que muestra la figura. Si el círculo más pequeño tiene un radio que mide 10 cm y las franjas tienen un grosor de 5 cm cada una, ¿cuál es el área del blanco completo?



b. ¿Cuál es el área disponible para grabar (corona externa) que posee el CD?



c. La pupila es aquel círculo pequeño oscuro que está en el centro del ojo y que tiene un diametro es de aproximadamente 5 mm. El iris es el anillo que rodea a la pupila: es de color variable y tiene un diametro de 18 mm.
¿Cuál es el área de la pupila y el iris respectivamente?



d. Si el perímetro de un círculo es 10π cm, ¿cuál es el área de su semicírculo?

e. El perímetro de un cuadrado es 16 cm. ¿Cuál es el área del círculo inscrito?

Imagen 33: Tarea Cuaderno de actividades 7° Básico

Fuente: Texto del estudiante 7° Básico Ministerio de Educación

Tabla 15: análisis de tarea

ANÁLISIS	
Página	77
Objetivo de la actividad	Resolver situaciones
Elementos que moviliza	Radio, Área, Diámetro, Pi, círculo inscrito
Nivel que se clasifica	Nivel 2: Análisis Nivel 3: Clasificación Se presenta un ejemplo de tarea que moviliza el nivel 2 ya que los estudiantes pueden descubrir y generalizar propiedades basadas en la observación y la manipulación, y por último de nivel 3 ya que les permite relacionar lógicamente diferentes propiedades de este o diferentes figuras.
Observaciones	Se presentan diversas situaciones, en las cuales se debe calcular el área de círculo.

En relación con el análisis de tareas desarrollados en los textos de estudios, en total se analizaron 13 de estás, a continuación, en la tabla 16, se presenta el detalle por cada uno de los textos.

Tabla 16: resumen de tareas en texto de estudio 7°basico matemática

Texto	**N° de tareas**
Texto del estudiante 7° Básico	9
Cuaderno de actividades 7° Básico	4
Total, de tareas	**13**

Fuente: Elaboración propia

4.3 Resumen de análisis de tareas en los niveles del Modelo de Van Hiele

Tabla 17: Matriz de resultados de Niveles del Modelo Van Hiele

Texto escolar	Tareas	Nivel de Van Hiele			
		Nivel 1:Reconocimiento	Nivel 2: Análisis	Nivel 3: Clasificación	Nivel 4: Deducción Formal
Texto del Estudiante	tarea 1				
	tarea 2				
	tarea 3				
	tarea 4				
Cuaderno de actividades	tarea 1				
	tarea 2				
	tarea 3				
	tarea 4				
	tarea 5				
	tarea 6				
	tarea 7				
	tarea 8				
	tarea 9				

Fuente: Elaboración propia

De la tabla 17 se puede observar que del total de tareas sólo el 7,7% está presente el nivel de reconocimiento. Así mismo el 100% de todas las tareas analizadas cubren el nivel 2 de análisis del modelo y el apartado del nivel 3 de clasificación contiene al 92,3% de las tareas, por otro lado, se observa que no hay ninguna tarea vinculada al nivel de deducción formal.

CAPÍTULO 5: CONCLUSIONES

A lo largo de este trabajo se ha presentado una serie de apartados que buscan dar cuenta de exhaustiva búsqueda para dar cumplimiento de los objetivos generales y específicos propuestos, con la finalidad de dar respuesta a la pregunta de investigación.

A continuación, se detalla el nivel de cumplimiento de cada uno los objetivos propuestos en la presente investigación:

5.1 Objetivos específicos

Objetivo específico 1: Identificar y revisar los niveles del modelo de Van Hiele en geometría, para el caso del círculo y circunferencia.

En el apartado 2.1 y 2.2 del marco teórico fueron revisados en detalle los niveles del modelo de Van Hiele realizando una descripción detallada apoyada de gráficos y elementos explicativos a través de los cuales se lograron identificar 4 niveles, el cual se apoyaron para aplicarlos en el círculo y circunferencia.

Objetivo específico 2: Caracterizar las tareas propuestas en el libro de texto y programa de estudio de 7º básico en el eje de geometría vinculadas a los conceptos del círculo y circunferencia del currículum nacional chileno vigente**.**

Se revisaron los textos de estudios asociados

- Texto del estudiante 7° Básico Matemática
- Cuaderno de actividades 7° Básico Matemática

Objetivo específico 3: Describir el comportamiento de los niveles en las tareas propuestos de forma general en los textos de estudio en base al análisis realizado.

En relación con lo anterior, como se logró en las evidencias y dar respuesta a los objetivos específicos 1, 2, y 3 entonces podemos concluir que se cumplió el objetivo general propuesto que dice relación a Analizar tareas propuestas en los textos de estudio de 7º básico del currículum nacional chileno vinculadas al aprendizaje del círculo y la circunferencia.

Por consiguiente, también se logra dar respuesta a la pregunta de investigación planteada en la presente investigación, que dice relación a ¿Qué niveles y fases del modelo de Van hiele para el caso particular del círculo y la circunferencia están presentes en las tareas propuestos en los textos de estudio del curriculum nacional chileno de 7º básico?

5.2 Conclusiones generales y futuras líneas de investigación

El presente trabajo es un aporte al área de educación matemática ya que entrega orientaciones metodológicas sobre cómo realizar un análisis de tareas, propuestas por el ministerio de educación para abordar objetivos de aprendizajes, específicamente en el eje de geometría, e ir identificando elementos, fases, niveles y adicionalmente con los resultados obtenidos se abren nuevos desafíos o líneas de investigación tales como elaborar secuencia didácticas en base a las tareas, crear nuevas propuestas de tareas de los niveles o fases faltantes, una mayor profundización en los objetos matemáticos, mayor interrelación entre ejes temáticos, como así una contextualización más cercana y experimental de los estudiantes, que les permita una mejor comprensión de la disciplina matemática.

Respecto de las conclusiones generales del estudio es posible comentar que las tareas analizadas en cada uno de los textos de estudio mencionados a largo de la investigación tiene una tendencia a estar presentes los niveles 2 y 3 del modelo de Van Hiele y en el lado contrario no se observa o se observa de manera muy disminuida tareas de tipo de nivel 1 y 4, las que nos parecen importantes de incorporar en los textos debido a su importancia en las adquisición de habilidades relacionados a pensamiento geométrico.

Dado que esta investigación se centró solo en el análisis de texto se hace necesario pensar en investigaciones futuras que visualicen el trabajo en aula de los docentes con los estudiantes y su relación con las tareas propuestas en los textos para analizar de mejor manera las fases del modelo de Van Hiele las cuales están íntimamente relacionadas al vínculo estudiante-docente, el cual no es posible de determinar solo con la observación de los textos.

Por lo que aún resta seguir indagando en modelos o metodologías que permitan enriquecer el proceso de enseñanza-aprendizaje, como así revisar más textos de enseñanza en niveles de enseñanza media o bien otras editoriales que vayan en beneficio de los estudiantes y su trayectoria educativa.

Sin duda en camino de la educación y formación de personas es interminable, considerando que los ejes y objetivos de aprendizajes tengan poca movilidad, es indispensable que el docente mantenga un espíritu indagador, de modelos y estrategias que permitan mejorar la práctica docente, y a su vez la absorción de nuevas habilidades, conocimientos y actitudes a los estudiantes, que permitan un acercamientos más accesible a los objetos matemáticos, relacionándolos con su entorno y sobre todo adquiriendo habilidades para su propia vida.

REFERENCIAS

Abrate, R. S., Delgado, G. I., & Pochulu, M. D. (2006). Caracterización de las actividades de Geometría que proponen los textos de Matemática. Revista Iberoamericana De Educación, 39(1), 1-9. https://doi.org/10.35362/rie3912598

Almeida, M. (2002). Desarrollo Profesional Docente en Geometría: análisis de un proceso de Formación a Distancia. (Memoria de tesis doctoral). Departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales y de las Matemáticas. Universidad de Barcelona, Barcelona. http://www.tesisenxarxa.net/TESIS_UB/AVAILABLE/TDX-1008102-120710//TOL119.pdf

Alreich, D. (2015). El Apocalipsis Explicado Capítulo A Capítulo - Manual Esencial y Práctico para El Estudio de Revelación.

Arce, D. (2019). Cuaderno de actividades 7° Básico Matemática. SM (Societas Mariae).

Arnheim, R. (2001) Arte y percepción visual. Madrid, España: Alianza Editorial.

Bembibre, C. (junio 2009). Definición de Círculo. Definición ABC. Desde https://www.definicionabc.com/ciencia/circulo.php

Bruce, & Mitford. (1997). El libro ilustrado de Signos y Símbolos. Diana.

Campbell, J. (2013) Imagen del mito. Albany: Atlanta.

Carmona Moreno, J. (2011). La circunferencia. Una propuesta didáctica usando modelo de van hiele y geometría dinámica.

Carmona Moreno, J. (2011). La circunferencia. Una propuesta didáctica usando modelo de van hiele y geometría dinámica.

Córdova, Doris. (2012). El texto escolar desde una perspectiva didáctico/ pedagógica, aproximación a un análisis. Investigación y Postgrado, 27(1), 195-222. Recuperado en 06 de enero de 2023, de http://ve.scielo.org/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1316-00872012000100008&lng=es&tlng=es.

Escuelas Arriba. (s/f). Escuelas Arriba. Recuperado el 20 de noviembre de 2022, de https://escuelasarriba.mineduc.cl/

Fabres Fernández, Roxana. (2016). Estrategias metodológicas para la enseñanza y el aprendizaje de la geometría, utilizadas por docentes de segundo ciclo, con la finalidad de generar una propuesta metodológica atingente a los contenidos. Estudios pedagógicos (Valdivia), 42(1), 87-105. https://dx.doi.org/10.4067/S0718-07052016000100006

Falconí-Procel, X. (2021). Modelo de Van Hiele y su utilización para la enseñanza de la geometría. Polo del Conocimiento, 6(3), 2261-2278. doi:http://dx.doi.org/10.23857/pc.v6i3.2505

Fouz, F. (2005). Modelo de Van Hiele para la didáctica de la geometría. En Raúl Ibáñez y Marta Macho, Un paseo por la geometría 2004/2005 (pp. 67-81). Bilbao: Departamento de Matemáticas, Universidad del País Vasco. Recuperado de http://cimm.ucr.ac.cr/ciaem/articulos/universitario/materiales/Modelo%20de%20Van%20Hiele%20para%20la%20did%C3%A1ctica%20de%20la%20Geometr%C3%ADa.*Fouz,%20Fernando%3B%20%20De%20Donosti,%20Berritzegune.*Fernando%20Fouz,%20Berritzegune%20de%20Donosti.pdf.

Lahitte, H.B. & Sánchez Vazquez, M.J. (2013). La observación como estrategia básica para construirexplicaciones en investigación cualitativa. En M.J. Sánchez Vazquez (Coord.). Investigar en CienciasHumanas. Reflexiones epistemológicas, metodológicas y éticas aplicadas a la investigación enPsicología. La Plata: Editorial de la Universidad Nacional de La Plata. En prensa

Goncalves, R. (2006). ¿Por qué los estudiantes no logran un nivel de razonamiento en la geometría?.Revista Ciencias de la Educación, 1(27), 83-98.

Gutiérrez, A. y Jaime, A. (1998). On the Assessment of the Van Hiele Levels os Reasoning. Focus on Learning Problems in Mathematics, 20 (2-3), 27-46.

Iturra, F., Manosalva, C., Ramírez, M., & David, R. (2019). Texto del estudiante 7° Básico Matemática. SM (Societas Mariae).

Jaime, A. (1993). Aportaciones a la interpretación y aplicación del Modelo de Van Hiele: La enseñanza de las isometrías en el plano. La Evaluación del nivel de razonamiento (Tesis Doctoral). Universidad de Valencia, España

McGinn y Borden, Framing Questions, Constructing Answers, LinkingResearch with Educational Policy for Developing Countries (Cambridge: Harvard UniversityPress, 1995), p. 110.

Matarrita, A. (2015). Círculo y circunferencia. CEIP Manuel Siurot.

Mineduc. (2020). Progresión de objetivos de aprendizaje de matemática(7° a 2° medio). https://issuu.com/javicaaro/docs/progresi_n_de_habilidades_matem_tica_de_7__a_2__me

Moreno, G., Velásquez, J., & Vergara, C. (2000). Matemática 2° Medio. Santillana.

Morse, J. & Bottorff, J. (2003). Asuntos críticos en los métodos de investigación cualitativa. Medellín: Universidad de Antioquía.

Montesinos Sirera, José. "Arquímedes y la medida del círculo". Ciencia y cultura en la Grecia Antigua, Clásica y Helenística.Fundación Canaria Orotava de Historia de la Ciencia: La Orotava, 1992.

Lolas, Apología del texto de estudio, literatura terciaria de la ciencia, discurso de presentación (Santiago: Editorial Universitaria, 1996).

Reveduc. (2021). Revista de educación. http://www.revistadeeducacion.cl/

Rizzolo, S. (2007). Diseño de actividades geométricas interactivas en el marco conceptual del modelo de van hiele. Publicación en la Web de la unidad didáctica: http://www.coopvgg.com.ar/sergiorizzolo/

Rodríguez Diéguez, J.L., Clemente Linuesa, M., Roda Salinas, F., Beltrán de Tena, R. y Quintero Gallego, A. (1984). Evaluación de textos escolares. Enseñanza and Teaching, 2, 139-152.

Sarrín Suárez, Mercedes Maritza. (2019). Rotaciones y niveles de razonamiento, según el modelo de Van Hiele: resultados de una experiencia. Educación, 28(54), 127-158. https://dx.doi.org/10.18800/educacion.201901.007

Vargas, G. y Gamboa, R. (2013). El modelo de Van Hiele y la enseñanza de la geometría. Uniciencia, 27(1), pp. 74-94. Universidad Nacional Heredia, Costa Rica. Recuperado de: http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=475947762005