



UNIVERSIDAD
SAN SEBASTIAN

**FACULTAD DE EDUCACIÓN
PROGRAMA FORMACIÓN PEDAGÓGICA
SEDE DE LA PATAGONIA – PUERTO MONTT**

**ELABORACIÓN DE UNA SERIE DE ACTIVIDADES DIDÁCTICAS
UTILIZANDO METODOLOGÍAS DE APRENDIZAJE POR
DESCUBRIMIENTO EN EL OBJETO MATEMÁTICO DE LOGARITMO
PARA ESTUDIANTES DE SEGUNDO AÑO MEDIO**

Tesina para optar al Grado de Licenciado en Educación

Profesor tutor: Mg. Karol Briceño Romero

Estudiantes: Camilo Ignacio Léniz Vivanco

Germán Adalio Ralil Ralil

Pablo Matías Yáñez Valencia

© Camilo Ignacio Leniz Vivanco, Germán Adalio Ralil Ralil, Pablo Matías Yáñez Valencia.

Se autoriza la reproducción parcial o total de esta obra con fines académicos, por cualquier forma, medio o procedimiento, siempre y cuando se incluya la cita bibliográfica del documento.

Puerto Montt, Chile

2023

**FACULTAD DE EDUCACIÓN
PROGRAMA FORMACIÓN PEDAGÓGICA
SEDE DE LA PATAGONIA – PUERTO MONTT**

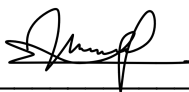
CALIFICACIÓN DEL EXAMEN DE GRADO

En Puerto Montt, el 27 de enero de 2023 los abajo firmantes dejan constancia de que los estudiantes:

Camilo Leniz Vivanco, German Rolil Rolil, Pablo Yáñez Valencia

del Programa Formación Pedagógica para Licenciados y/o Profesionales, en el área de Matemática, han aprobado el examen de grado con las siguientes calificaciones:

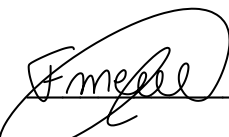
Nombre estudiante	Calificación
Camilo Leniz V.	6,8
German Rolil R.	6,4
Pablo Yáñez V.	7,0



Firma Docente evaluador/a



Firma Docente evaluador/a



Firma Docente evaluador/a

AGRADECIMIENTOS

Un trabajo como el que culminamos representa un trabajo arduo y es la expresión máxima de la finalización de un periodo en el cual se compatibilizó estudio y trabajo. En ese sentido, agradecemos profundamente a todos los docentes que nos acompañaron en este intenso camino, quienes dieron lo mejor de sus capacidades profesionales para formarnos, en especial a nuestras profesoras guías, Francisca y Karol, quienes nos acompañaron a lo largo de este proceso, quienes nos guiaron y forjaron como profesores íntegros y capacitados en nuestras áreas. Agradecemos de forma especial a la Universidad, por permitirnos finalizar un sueño y objetivo tan anhelado, agradecemos además en gran manera a los colegios que nos permitieron realizar nuestras prácticas profesionales. Agradecemos a nuestros compañeros, quienes siempre fueron un apoyo fundamental en el desarrollo de nuestras carreras, gracias por su buena disposición por enseñar y compartir sus conocimientos adquiridos en las clases.

Agradecemos profundamente a nuestras familias, quienes nos acompañaron, apoyaron y ayudaron a levantarnos incluso en los momentos más difíciles.

Tabla de contenido

1. CAPÍTULO 1: ANTECEDENTES	5
1.1 Introducción al capítulo	5
1.2 El modelo educativo chileno.....	5
1.3 La enseñanza de la matemática en Chile.....	9
1.4 El aprendizaje por descubrimiento como una alternativa didáctica	11
1.5 Enseñanza-aprendizaje de los Logaritmos.....	13
1.6 Problemática.....	15
1.7 Objetivo.....	16
1.7.1 Objetivo general.....	16
1.7.2 Objetivos específicos	16
2. CAPÍTULO 2: MARCO TEÓRICO.....	18
2.1 Introducción al capítulo	18
2.2 El aprendizaje por descubrimiento.....	18
2.2.1 Principios del aprendizaje por descubrimiento	19
2.2.2 Teoría de la Instrucción de Bruner	22
2.3 Currículum.....	27
2.4 Descripción epistemológica del logaritmo.....	29
2.4.1 Marco histórico	29

2.4.2	Utilidad de los logaritmos	32
2.4.3	Fenomenología actual	36
2.4.4	Definición experta	37
3.	CAPÍTULO 3: MARCO METODOLÓGICO	41
3.1	Introducción al capítulo	41
3.2	Enfoque de investigación.....	41
3.3	Progresión del contenido logaritmo en el currículum chileno	41
3.3.1	Logaritmos en el programa de estudio	42
3.4	Texto de estudio.....	48
3.5	Formato de la secuencia didáctica	56
3.5.1	Objetivo de aprendizaje	57
3.5.2	Organización de actividades de la secuencia didáctica.....	57
3.5.3	Estructura de la actividad didáctica	58
4.	CAPÍTULO 4: RESULTADOS.....	61
4.1	Introducción al capítulo	61
4.2	Actividad 1	61
4.3	Actividad 2.....	65
4.4	Actividad 3.....	69
5.	CONCLUSIONES	74

5.1	Introducción al capítulo	74
5.2	Conclusiones generales.....	74
5.3	Limitaciones de la investigación	76
5.4	Proyecciones de la investigación	76
6.	REFERENCIAS	77
7.	ANEXOS.....	83

Índice de Tablas

TABLA 1.1 NIVELES DE COMPETENCIA EN MATEMÁTICA PARA LA PRUEBA PISA. FUENTE: OCDE 2005.....	11
TABLA 2.1 PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS. FUENTE: JIMÉNEZ 2013.....	38
TABLA 3.1 PROPUESTA CURRICULAR DE LA ENSEÑANZA DE LOGARITMOS EN SEGUNDO AÑO DE EDUCACIÓN MEDIA EN CHILE. FUENTE: MINEDUC 2016.....	43
TABLA 3.2 OBJETIVOS DE APRENDIZAJE E INDICADORES DE EVALUACIÓN DE CONTENIDOS PREVIOS RELACIONADOS A LOGARITMOS. FUENTE: UNIDAD DE CURRÍCULUM Y EVALUACIÓN (S.F.).....	46
TABLA 3.3 OBJETIVOS DE APRENDIZAJE E INDICADORES DE EVALUACIÓN DE CONTENIDOS POST ENSEÑANZA DE LOGARITMOS. FUENTE: UNIDAD DE CURRÍCULUM Y EVALUACIÓN (S.F.).....	47
TABLA 3.4 OBJETIVO DE APRENDIZAJE RELACIONADO AL CONTENIDO DE LOGARITMO EN SEGUNDO AÑO DE ENSEÑANZA MEDIA. FUENTE: MINEDUC 2016.	57
TABLA 3.5 ORGANIZACIÓN DE LAS ACTIVIDADES DIDÁCTICAS PROPUESTAS. FUENTE: ELABORACIÓN PROPIA.....	58
TABLA 3.6 ESTRUCTURA DE LA ACTIVIDAD DIDÁCTICA DE APRENDIZAJE POR DESCUBRIMIENTO. FUENTE: ELABORACIÓN PROPIA.	60
TABLA 4.1 PROPUESTA DE ACTIVIDAD DIDÁCTICA PARA INTRODUCIR EL CONCEPTO DE LOGARITMO. FUENTE: ELABORACIÓN PROPIA.....	65
TABLA 4.2 PROPUESTA DE ACTIVIDAD DIDÁCTICA PARA LAS PROPIEDADES DE MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN DE LOGARITMO. FUENTE: ELABORACIÓN PROPIA.....	69
TABLA 4.3 PROPUESTA DE ACTIVIDAD DIDÁCTICA DE PROPIEDADES DE LOGARITMOS, COMO IDENTIFICACIÓN DE PATRONES EN LOGARITMO DE LA UNIDAD Y DE LA BASE. FUENTE: ELABORACIÓN PROPIA.....	73

Índice de Figuras

FIGURA 1.1 MATRIZ DE UBICACIÓN DE LAS RACIONALIDADES CURRICULARES SEGÚN SUS CARACTERÍSTICAS. FUENTE: PASCUAL, 1998.....	7
FIGURA 2.1 GRÁFICAS DE FUNCIONES LOGARÍTMICAS. FUENTE: JIMÉNEZ, 2013, P.177.....	38
FIGURA 3.1 RELACIÓN POTENCIA, RAÍZ Y LOGARITMO. FUENTE: DÍAZ ET AL. 2020.	49
FIGURA 3.2 DEFINICIÓN DE LOGARITMO. FUENTE: DÍAZ ET AL. 2020.	50
FIGURA 3.3 PROPIEDAD LOGARITMO DE LA BASE Y LOGARITMO DE LA UNIDAD. FUENTE: DÍAZ ET AL. 2020.....	50
FIGURA 3.4 PROPIEDAD DEL LOGARITMO DE UNA POTENCIA DE LA BASE. FUENTE: DÍAZ ET AL. 2020.....	51
FIGURA 3.5 ACTIVIDAD QUE PRESENTA EL ALGORITMO DE USO DE UNA TABLA LOGARÍTMICA. FUENTE: DÍAZ ET AL. 2020.....	52
FIGURA 3.6 PROPIEDAD DEL LOGARITMO DE UN PRODUCTO Y UN COCIENTE. FUENTE: DÍAZ ET AL. 2020.....	53
FIGURA 3.7 PROPIEDAD DEL CAMBIO DE BASE DE UN LOGARITMO. FUENTE: DÍAZ ET AL. 2020.	53
FIGURA 3.8 EJEMPLOS DE APLICACIÓN DE UN LOGARITMO. FUENTE: DÍAZ ET AL. 2020.....	54
FIGURA 3.9 ACTIVIDAD DE APLICACIÓN DE LOGARITMOS MEDIANTE INTENSIDAD SONORA. FUENTE DÍAZ ET AL. 2020	55
FIGURA 3.10 ACTIVIDAD DE APLICACIÓN DE LOGARITMOS MEDIANTE ESCALA DE PH. FUENTE DÍAZ ET AL. 2020 ...	56

RESUMEN

En esta investigación, se elaboró una propuesta didáctica en base al aprendizaje por descubrimiento para el objeto matemático de logaritmo, mediante el uso de la teoría de instrucción de Bruner. Esta propuesta está orientada a estudiantes de segundo año medio, curso en el cual se aborda el objeto de estudio. El paradigma educativo chileno actual, durante los últimos 40 años, se ha caracterizado por una racionalidad técnica, lo que se traduce en el abordaje de contenidos por parte del profesor de forma instruccional, dejando al estudiante en un rol pasivo en el proceso de enseñanza aprendizaje, en vez de un rol activo.

La propuesta se elaboró posterior al análisis del currículum y textos de estudio propuestos por el MINEDUC para el concepto de logaritmo en estudiantes de segundo medio; además de un análisis epistemológico, que abordó este concepto desde su tránsito histórico, utilidad y fenomenología actual. Se incluye el análisis de la estrategia de aprendizaje por descubrimiento mediante la teoría de instrucción de Bruner para la elaboración de la propuesta didáctica.

La propuesta se basa en tres actividades, de un tiempo promedio de una hora pedagógica por cada una. En estas, se integran los tres tipos de representación de Bruner, enactiva, icónica y simbólica. La estructura de las actividades fue elaborada considerando aspectos tales como conocimientos previos por parte del estudiante, predisposición a aprender y tipo de representación basados en la teoría de la instrucción de Bruner y el programa de estudios de segundo año medio. De las tres actividades propuestas, todas las propuestas se benefician de la riqueza histórica de los logaritmos, mediante el trabajo a partir de tablas de potencias. Estas actividades están orientadas al trabajo colaborativo, lo que enriquece el proceso de descubrimiento. Además, a partir de una serie de interrogantes, los estudiantes avanzaron en el proceso de dotar de sentido del concepto de logaritmo e identificar sus propiedades.

Palabras clave: Aprendizaje por descubrimiento - Didáctica - Matemática - Logaritmos

ABSTRACT

In this research, a didactic proposal was elaborated based on learning-by-discovery for the mathematical object of logarithms, through the use of Bruner's Theory of Instruction. This proposal is destined for 10th grade students, which is the grade the object of this study is worked with. The current Chilean educational paradigm, throughout the last 40 years, has been characterised by a technical rationality, which means teachers approaching contents in an instructional way, leaving the student in a passive role in the teaching-learning process, instead of an active role.

The proposal was elaborated after analyzing the curriculum and textbooks proposed by the Chilean Ministry of Education, for the concept of logarithm in 10th grade students; in addition to an epistemological analysis, which approached this concept from its historical journey, usefulness and current phenomenology. The analysis of the learning-by-discovery strategy through Bruner's instructional theory was also included for the elaboration of the didactic proposal.

The proposal is based on three activities, each one lasting for approximately one pedagogical hour. In these activities there are three types of Bruner's representations integrated: the enactive, the iconic and the symbolic. The structure of the activities was elaborated considering some aspects such as students' previous knowledge, willingness to learn and types of representation based on Bruner's instructional theory and the 10th grade curriculum. Out of the three proposed activities, the first two ones are helped by the historical wealth of the logarithm, whereas the third activity reflects the application of graphical representations of logarithm through conjectures. These activities are destined for teamwork, which enriches the discovery process. Moreover, based on a series of questions, the students moved forward in the process of making sense out of the concept of logarithm.

Keywords: learning-by-discovery – didactic – Mathematic - Logarithm

INTRODUCCIÓN GENERAL

Los diversos cambios que ha tenido el modelo educacional chileno respecto al eje curricular han llevado a tensiones al transitar desde un modelo técnico a uno de carácter práctico. Estas tensiones se pueden vislumbrar en que las bases curriculares del área de matemática promueven el pensamiento matemático como una serie de habilidades y actitudes que proyectan que el estudiante sea capaz de aplicar flexiblemente los contenidos vistos en clase a su vida cotidiana pero, que a la vista de los resultados obtenidos por los estudiantes chilenos en las pruebas estandarizadas internacionales como PISA, se evidencia que existen dificultades para cumplir con los planteamientos antes mencionados.

Algunos conceptos matemáticos son tratados de forma superficial, como por ejemplo los logaritmos, los cuales en muchas ocasiones son enseñados de manera algorítmica, desprovistos de su contexto histórico y significado para los estudiantes. Algunos autores atribuyen este fenómeno a un problema del sistema, en el que la didáctica utilizada por los docentes, se mantiene en una clase expositiva de carácter unidireccional.

Entre los diferentes marcos teóricos existentes, en esta investigación se analizarán los postulados del aprendizaje por descubrimiento propuestos por la teoría de la instrucción de Bruner para elaborar algunas actividades didácticas que permitan enseñar los logaritmos a estudiantes de segundo año de enseñanza media.

En el capítulo de antecedentes de esta investigación se estudia el recorrido por los hitos de la historia en los últimos 40 años de la educación en Chile, haciendo una pausa en la aplicación del currículum, particularmente en el objetivo de aprendizaje de logaritmos en segundo medio, vislumbrando una enseñanza basada en la racionalidad técnica, que no permite en el estudiante, el desarrollo de un rol protagónico en la construcción de su aprendizaje. Se explica, en este mismo capítulo, el cambio de paradigma curricular que ha tenido el modelo educacional chileno durante las últimas décadas y cómo esto ha generado cambios en el sistema, ya que lo que plantea el currículum dista bastante de la modalidad educativa implementada en la actualidad.

En el capítulo de marco teórico, para sustentar la propuesta de actividades didácticas, se realiza una revisión sobre la metodología didáctica del aprendizaje por descubrimiento a partir de la teoría de instrucción de Bruner, seguido de ello, se realizará una descripción epistemológica del concepto de logaritmo, abordándolo desde su marco histórico, aplicaciones en diversas áreas del conocimiento, fenomenología actual en el currículum educacional y también en la definición experta de este.

En el capítulo de marco metodológico se explica el enfoque de esta investigación, para luego estudiar la progresión de contenidos en el currículum chileno hasta llegar al concepto de logaritmos en segundo año de enseñanza media, así como también analizar el cómo es abordado este concepto en el texto de estudio del nivel mencionado anteriormente. Para finalizar el capítulo, se presentará el formato de las actividades didácticas que se elaborarán y se organizarán de acuerdo a las categorías del tema, las cuales serán: conceptos y propiedades.

En el capítulo de resultados se exponen las tres actividades didácticas elaboradas en base a la teoría de la instrucción de Bruner, cuya duración promedio por actividad, es de cuarenta y cinco minutos. Estas actividades se abordaron desde los tres tipos de representaciones propuestas por Bruner (enactivo, icónico y simbólico).

El capítulo de conclusiones muestra las reflexiones finales de la investigación respecto a los objetivos planteados, además de explicar las limitaciones de este estudio, así como también sus proyecciones.

1. CAPÍTULO 1: ANTECEDENTES

1.1 Introducción al capítulo

En este capítulo se abordará el estado actual del tema de investigación, estudiando cómo se ha construido el modelo educativo chileno durante las últimas décadas, con la finalidad de mostrar las posibles tensiones que pueden existir debido a los cambios en los paradigmas educativos, para luego revisar lo que el currículum actual plantea en la asignatura de matemática. También, se hará una revisión sobre la metodología didáctica del aprendizaje por descubrimiento y, por el contrario, cómo el concepto de logaritmo es abordado con una metodología de tipo instruccional. Finalmente se expondrá la problemática de este trabajo y los objetivos de la investigación.

1.2 El modelo educativo chileno

Los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática, durante las últimas décadas, han tomado un rol fundamental en los establecimientos educativos a nivel mundial, debido principalmente a las implicancias que ha tenido esta disciplina para la humanidad desde las primeras civilizaciones (Caballero, 2010). Por el motivo mencionado anteriormente, es que probablemente ninguna sociedad actual carece de planes de estudio relacionados con la educación matemática (Mora, 2002).

En cuanto al sistema educacional, Núñez (2020) en su artículo enunciado como “El Impacto del Modelo Neoliberal en la Educación Chilena” plantea que la educación es un instrumento de poder por medio del cual se ha ideologizado, estandarizado y utilizado como una herramienta no solo de formación o preparación para la conducción de la civilización y creación de propuestas para transformar la realidad y retos de cada pueblo, sino también, para el control social y de adoctrinamiento ideológico de las masas, en medio de diferentes contextos sociopolíticos a lo largo de la historia.

En Latinoamérica las reformas educativas obedecen a una política Neoliberal, las cuales fueron impulsadas por las instancias de poder internacional y nacional como una respuesta a los problemas de calidad de los sistemas educativos de la región. Chile fue el laboratorio latinoamericano en la aplicación de las reformas educativas (Cancino, 2010).

Estévez (2017) y Núñez (2020) postulan que, durante el proceso de dictadura, iniciado en la década de los 70, se introdujo en Chile el modelo Neoliberal, el cual tuvo un impacto en diversas áreas de la sociedad. Las consecuencias de ello en la educación, produjeron un aumento en las brechas sociales y económicas, producto de la comprensión mercantil de ésta y su correspondiente privatización.

Respecto a las reformas educacionales realizadas durante la década de los 80, se ha señalado lo siguiente:

A comienzos de los años 80 tuvo lugar una profunda reforma estructural del sistema educativo. El rasgo principal de la reforma fue la descentralización de los establecimientos escolares del sector público, cuya administración fue transferida a las municipalidades. La reforma favoreció también la incorporación del sector privado como oferente en la educación subvencionada por el Estado (Larrañaga, 1995, p. 245).

Las estrategias neoliberales dirigidas a la educación imprimen a los discursos pedagógicos la tónica de su lógica económica. El efecto es un deterioro profundo de los enunciados dirigidos a enseñar y aprender (Puigross, 1996). “El acceso igualitario al conocimiento como a los centros de educación se perdió, así como la formación crítica y humanista ante el aumento de la instrucción técnica.” (Núñez, 2020, p.48).

Por lo tanto, las premisas de las políticas neoliberales que apuntaban a mejorar la calidad de la educación no solo no se cumplieron, sino que van en desmedro de la misma.

Se ha postulado que las políticas educativas neoliberales persisten a la fecha, como lo indica el siguiente extracto:

Al hacer evaluación de los años dictatoriales (1973-1989) y post dictatoriales (1990-2021) en Chile, no pocos observadores señalan que lo que en dictadura se diseñó e implementó, en democracia se institucionaliza (Bellei and Vanni 2015; Ruiz 2018). La profundidad de los cambios en el modelo de sociedad, en el modelo económico, y como consecuencia en la cultura chilena desde 1973 en adelante, produjo cambios estructurales que, si bien buena parte de la social democracia de los años 1990 y 2000 en Chile quiso transformar, no reunieron las voluntades suficientes para hacer los cambios radicales necesarios (Falabella 2021). Lo que ocurrió en el territorio de la seguridad social y de la salud, también se experimentó en el terreno de la educación (Madero, 2021, p. 139).

Con respecto al aumento y persistencia en la educación de una racionalidad técnica, existen tres paradigmas curriculares o tres formas de interpretar el conocimiento del campo curricular, los cuales son denominados como racionalidad técnica, praxeológico y crítico (Grandy, 1998).

Estas racionalidades distintas y a veces excluyentes se disputan el predominio para la elaboración del currículum escolar (Pascual, 1998).

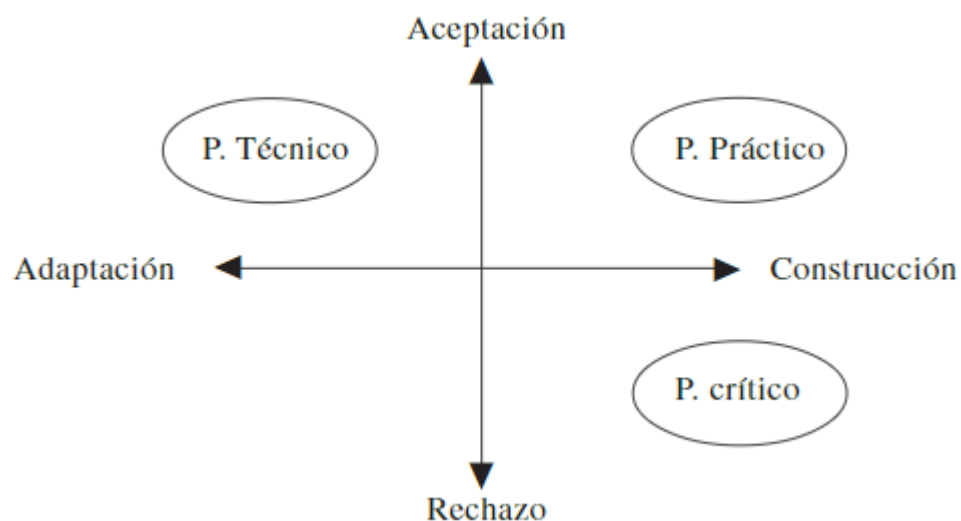


Figura 1.1 Matriz de ubicación de las racionalidades curriculares según sus características. Fuente: Pascual, 1998

Como puede observarse en la matriz, la principal diferencia entre el paradigma técnico y el práctico está en cuanto al rol de los profesores en la gestación del currículo. Mientras en el técnico se lo concibe como un adaptador o intérprete, en el práctico es un constructor de currículum. Ambos coinciden en que en ninguno de los dos se cuestionan las características culturales y sociales del contexto. Esta última, sin embargo, es la principal diferencia entre el práctico y el crítico, ya que este último cuestiona fuertemente, sin considerar dadas las características del contexto. En cambio, ambos consideran al profesor como constructor de currículum. Por último, el técnico y el crítico difieren completamente en ambas dimensiones consideradas en los ejes de coordenadas de la matriz.

Respecto al proyecto curricular chileno de ese entonces, se plantea que:

Los proyectos curriculares como una nueva estrategia de producción curricular, implican la adopción de una racionalidad práctica y de un enfoque de construcción centrado en el proceso, como se ha señalado en los puntos anteriores, que entra en pugna con el paradigma técnico clásico que ha predominado en las prácticas de producción curricular en nuestro país (Pascual, 1998, p. 68).

Otros autores indican que el modelo curricular actual, que está dividido por objetivos, correspondería al resultado de un enfoque positivista de la educación:

El currículo escolar en Chile responde a un modelo pedagógico por objetivos, que esencialmente responde a un enfoque positivista de la educación, de modo que en cada asignatura disciplinar el profesorado tiene un listado de objetivos de aprendizaje (OA, en adelante) que desarrollar con su alumnado y el resultado de este proceso será evaluado en forma sumativa, asignando una nota a cada estudiante (Mujica-Johnson, 2020, p. 473).

El positivismo, que aparece con Augusto Comte, en la primera mitad del siglo XIX, plantea la idea del estudio científico de la sociedad humana, a fin de superar toda forma especulativa, a lo que indica que la realidad social humana debe ser comprendida científicamente (Gonzalez, 2014).

El método científico no está completo con la recopilación sistemática de datos: requiere una explicación racional de las relaciones entre ellos. En otras palabras, los ingredientes esenciales del método científico son la descripción de fenómenos (qué ocurre, cómo ocurre) y la explicación de sus relaciones (por qué ocurre) (Fuster y Martín, 2012).

1.3 La enseñanza de la matemática en Chile

De acuerdo a las bases curriculares de la asignatura de matemática propuesta por el Ministerio de Educación de Chile, uno de los principales objetivos de la asignatura es lograr que las y los estudiantes desarrollen el pensamiento matemático, para lo cual:

Esto implica formar un o una estudiante que perciba la matemática en su entorno y que se valga de los conocimientos adquiridos como una herramienta útil para describir el mundo y para manejarse efectivamente en él; que reconozca las aplicaciones de la matemática en diversos ámbitos y que la use para comprender situaciones y resolver problemas. El pensamiento matemático se define como una capacidad que nos permite comprender las relaciones que se dan en el entorno, cuantificarlas, razonar sobre ellas, representarlas y comunicarlas. En este sentido, el papel de la enseñanza de la matemática es desarrollar las habilidades que generan el pensamiento matemático, sus conceptos y procedimientos básicos, con el fin de comprender y producir información representada en términos matemáticos (Mineduc, 2015, p. 97).

Pese a lo anteriormente expuesto y en contradicción con la propuesta del ministerio de educación, los procesos de enseñanza de la matemática que se dan hoy en día en las escuelas chilenas siguen estando en buena parte orientados hacia el aprendizaje de nociones y procesos abstractos descontextualizados, lo que provoca que los estudiantes perciban que el conocimiento matemático se articule en base a algoritmos y procesos de memorización sobreponiéndose a la comprensión y reflexión de estos mismos, impidiendo que el estudiante pueda llevar los conocimientos adquiridos a la realidad que lo rodea (Vidal, 2009). Lo expresado anteriormente se condice con los resultados obtenidos por los estudiantes en las pruebas estandarizadas como la prueba PISA, que

en los resultados del 2018 en el área de matemática muestra que alrededor del 48% de los estudiantes chilenos alcanza apenas el nivel 2 de desempeño, de un total de 6, considerando que el promedio OCDE es del 76% para este nivel (Agencia de Calidad de la Educación, 2018). El nivel 2 de la prueba PISA indica que un estudiante es capaz de interpretar y reconocer, sin instrucciones directas como representar matemáticamente situaciones simples, lo que sugiere que los estudiantes chilenos no desarrollan las habilidades de mayor nivel cognitivo en la asignatura de matemática, las cuales se encuentran resumidas en la tabla 1.1. Por este motivo, resulta interesante revisar los procesos didácticos con los que las y los docentes de matemática abordan los contenidos de esta asignatura.

Nivel	Descripción
1	Los estudiantes saben responder a preguntas relacionadas con contextos que le son conocidos, en los cuales está presente toda la información pertinente y en que las preguntas están claramente definidas.
2	Los estudiantes saben interpretar y reconocer situaciones en contextos que sólo requieren una inferencia directa. Son capaces de extraer información pertinente de una sola fuente y hacer uso de solo un modelo de representación.
3	Los estudiantes son capaces de seleccionar y aplicar estrategias de solución de problemas más sencillos. También son capaces de interpretar y utilizar información y representaciones basadas en diferentes fuentes de información. En este nivel, el estudiante ya es capaz de elaborar breves escritos exponiendo sus interpretaciones, resultados y razonamientos.
4	Los estudiantes son capaces de trabajar eficazmente con modelos explícitos en situaciones complejas y concretas que pueden conllevar condicionantes o exigir la formulación de supuestos. Tiene la habilidad de seleccionar e integrar diferentes modos de representación, incluyendo lo simbólico, asociándolas directamente a situaciones del mundo real.

5	Saben desarrollar modelos y trabajar con ellos en situaciones complejas, identificando los condicionantes y especificando los supuestos. Pueden reflexionar sobre sus acciones y formular y comunicar sus interpretaciones y razonamientos. Además, pueden seleccionar, comparar y evaluar estrategias adecuadas de solución de problemas para abordar situaciones complejas respecto a los modelos trabajados.
6	Los estudiantes pueden formar conceptos, generalizar y utilizar información basada en investigaciones y modelos de situaciones de problemas complejos. También son capaces de relacionar diferentes fuentes de información y representaciones y traducirlas entre ellas con flexibilidad. Estos alumnos pueden aplicar su entendimiento y comprensión, así como su dominio de las operaciones y relaciones matemáticas simbólicas y formales y desarrollar nuevos enfoques y estrategias para abordar situaciones nuevas.

Tabla 1.1 Niveles de competencia en matemática para la prueba PISA. Fuente: OCDE 2005

En base a lo mencionado anteriormente, se puede inferir que, desde la perspectiva de la educación tradicional de la matemática, la presentación de los contenidos a los estudiantes con la estructura de introducción a los nuevos conceptos, presentación de algoritmos y reglas para realizar procedimientos no genera un trabajo adecuado del sentido lógico del educando, ni tampoco promueve la aplicación de las propiedades matemática o la del razonamiento en dichos procedimientos (Coria, 2018).

1.4 El aprendizaje por descubrimiento como una alternativa didáctica

De la forma en que se presentan los contenidos y como son enseñados es responsable la didáctica. La didáctica puede ser vista como “la ciencia que se interesa por la producción y comunicación del conocimiento. Saber qué es lo que se está produciendo en una situación de enseñanza es el objetivo de la didáctica.” (Brousseau citado por Kieran, 1988, p. 596).

Vargas (2020), considera que la didáctica se conceptualiza no sólo como un conjunto de técnicas y recursos sino además como un conjunto de normas, principios y criterios. El autor anterior confirma a la didáctica como una disciplina con bases científicas, filosóficas y como resultado de la experiencia docente.

En su artículo “Importancia de la didáctica”, Díaz (1997) citado en Vargas (2020), plantea que:

La forma de resolver el principal problema docente educativo -enseñar todo a todos- se encuentran en la epistemología didáctica.: Leyes, principios y elementos flexibles, realistas, equilibradas que es preciso conocer para evitar viejos paradigmas como el conductista que bloquean la mente del estudiante y el profesor. Lo ideal es aprender descubriendo. Para aplicar una buena didáctica es preciso definir cuál es la aspiración, el encargo social, por lo cual el objetivo es el elemento mediador entre la sociedad y la escuela. El proyecto educativo de cada escuela debe dar respuesta a las aspiraciones personales y sociales (s.n.).

Con respecto a la disciplina de la matemática, se propone que “la Didáctica de la Matemática atiende a la construcción de modelos teóricos para explicar los distintos aspectos de la enseñanza-aprendizaje de la matemática en el marco de los sistemas educativos” (Gómez, 2003, p. 378).

La matemática no es una disciplina experimental en sí misma. La matemática se fundamenta en axiomas y razón pura, y sus resultados no requieren verificación experimental para ser válidos. El hecho de que los conceptos matemáticos sean aplicables a fenómenos físicos, incluso más allá del contexto donde fueron originalmente desarrollados, ha sido siempre motivo de perplejidad (Fuster y Martín, 2012).

Este motivo de perplejidad es uno de los fundamentos que lleva a los docentes a utilizar el aprendizaje por descubrimiento en la didáctica de la matemática.

Sánchez (1991), menciona que con la finalidad de mejorar las prácticas de enseñanza-aprendizaje en las áreas de ciencias y matemática, surgieron diversas metodologías didácticas basadas en el descubrimiento. Estas metodologías se basaban en el principio

según el cual cada estudiante sería capaz de encontrar por su cuenta una regla o estructura conceptual desconocida para él a partir de un conjunto de estímulos suministrados por el profesor. El objetivo de estos métodos de enseñanza es que sean los estudiantes quienes produzcan su propio conocimiento, a partir del descubrimiento. Los beneficios que se podrían observar en ellos a partir de este tipo de experiencias sería la de mejorar sus habilidades investigativas, de resolución de problemas y de razonamiento, lo que crearía actitudes positivas en ellos hacia la asignatura de matemática (Sánchez, 1991).

David Ausubel en 1963, plantea en la teoría del Aprendizaje significativo, que el significado es producto exclusivo del descubrimiento creativo y no verbal. Los conceptos abstractos son vacíos a menos que el alumno los descubra directamente de su propia experiencia empírica no verbal.

1.5 Enseñanza-aprendizaje de los Logaritmos

Siguiendo la línea de la significancia, nos encontramos en una paradoja, ya que por una parte los logaritmos están presentes en el currículum chileno, pero estos no son base fundamental del mismo, en donde Gamboa (2021) señala que los logaritmos son en esencia percibidos por nuestros sentidos, tal como se puede observar en la siguiente cita de su publicación “Logaritmos, la matemática de la percepción”.

Existe una ley publicada por primera vez en 1860 que se conoce como ley de Weber-Fechner. Es una ley que habla de la percepción y establece una relación entre la magnitud de un estímulo y la forma en que éste es percibido por los sentidos. Pues bien, resulta que ésta es una ley logarítmica. Es decir, la magnitud del estímulo debe ir siendo mayor en una proporción exponencial, para que nosotros percibamos un cambio de manera lineal. Tenemos unos sentidos que interactúan con la realidad de manera logarítmica. Existen una gran cantidad de ejemplos que abarcan prácticamente la totalidad de nuestros sentidos (Gamboa, 2021).

Por otra parte, con respecto a la enseñanza de los logaritmos, en la literatura disponible, podemos observar que algunos autores identifican las falencias descritas anteriormente en la enseñanza de estos mismos. De acuerdo a Ferrari (2008), se señala que la presentación del objeto matemático de logaritmos se encuentra desconectada de sus fundamentos, no desarrollando sus significados matemáticos, lo que nos entrega una referencia de por qué los estudiantes no serían capaces de comprender este tópico con la profundidad deseada, sino más bien como el exponente al que se debe elevar una base para obtener un determinado valor (Ferrari, 2008).

En una clase tradicional de matemática se introduce la definición de logaritmo, se muestran ejemplos, se enuncian (en general sin demostración) y se dan ejemplos de las propiedades y finalmente se realizan ejercicios de práctica, siendo éste el único papel del alumno: reproducir, de una forma sistemática, lo que el profesor presenta; dejando de lado el contexto histórico que dio origen al logaritmo como herramienta para simplificar cálculos que permite realizar multiplicaciones, divisiones y potencias de manera rápida (Sanabria y Costa, 2016).

En concordancia con el párrafo anterior, de acuerdo a Ferrari y Farfán (2007) consideran que la presentación escolar de los logaritmos se encuentra “absolutamente escondida de sus orígenes, vaciada de significados, nos confiere una primera explicación del por qué los alumnos no logran articular las diferentes presentaciones de los logaritmos...” (Ferrari y Farfán, 2007, p. 497). Lo anterior, refuerza la idea de que es necesario abordar el concepto de logaritmos en el ámbito escolar con otro tipo de enfoque, para dar un mayor significado a este contenido.

Sierpinska (1992) cuestiona la presentación de las definiciones de los conceptos como su esencia cuando debería ser el objeto el que determina la definición, pues el abordaje de la funcionalidad de los logaritmos raya en lo axiomático, no encontrando elementos que permitan el pasaje de lo aritmético a lo analítico en el tratamiento de este concepto.

Los estudios acerca de la enseñanza y entendimiento por parte del alumnado sobre el concepto del concepto de logaritmos han sido escasos. Es generalizado el poco peso educativo asignado a este objetivo de aprendizaje, sin considerar la relevancia que tiene

dicho concepto en el desarrollo de habilidades matemáticas de un estudiante, inclusive en la educación superior (Ferrari y Farfán, 2007).

Numerosas investigaciones, coinciden en proponer un cambio del enfoque tradicional de la enseñanza del concepto logaritmo por una enseñanza basada en el contexto histórico que le dio origen, que le otorgue significado y ponga de manifiesto la importancia de las relaciones entre las progresiones aritméticas y geométricas (Ferrari y Farfán, 2008; Ferrari, 2004; Abrate, Pochulu, 2007a, 2007b; Schubring, 2008; Gacharná León, 2012; Márquez, 2010; Morales Martínez, 2013). En la mayoría de las situaciones escolares, la enseñanza de logaritmo se realiza de manera mecánica y fuera de contexto.

1.6 Problemática

El modelo económico neoliberal implantado en la educación chilena en los años 80, produjo profundos cambios en el paradigma educacional, entre ellos, fomentar la competitividad de los estudiantes y la implementación de un currículum extenso. Estas estrategias se enmarcaron dentro de un paradigma curricular técnico, las cuales aún generan tensiones en el modelo actual el cual transita hacia un paradigma práctico. Estas tensiones se pueden evidenciar, por ejemplo, en que las bases curriculares actuales buscan desarrollar el pensamiento matemático en los estudiantes, buscando que éstos puedan aplicar los conocimientos adquiridos de una forma integral para explicar el mundo que los rodea, pero por otro lado algunos contenidos siguen siendo abordados de una manera algorítmica y con un enfoque orientado a la operatoria, más que a valorar el significado y la importancia de la herramienta a abordar, por lo que para los estudiantes estos contenidos perderían su propósito, y por lo tanto, dificultarían un aprendizaje significativo.

Un ejemplo de lo mencionado anteriormente son los logaritmos, que tienen una relación directa con el comportamiento humano, además, cuya riqueza histórica no es aprovechada en el currículum para darle un significado al contenido, sino que es más bien abordado como un concepto relacionado a las potencias y raíces, obviando su

construcción y el beneficio que generó para la sociedad, siendo abordado mediante ejercicios de carácter rutinario.

Para promover un aprendizaje significativo, existen alternativas didácticas a las clases expositivas y unidireccionales, entre ellas, el aprendizaje por descubrimiento, que propone que sean los estudiantes los encargados de descubrir los conceptos por medio de la guía del docente. El aprendizaje por descubrimiento, promueve el pensamiento crítico y capacidades de reflexión en los estudiantes.

Por estas razones, nos planteamos la siguiente pregunta de investigación:

¿Qué actividades didácticas se deberían implementar para aplicar el aprendizaje por descubrimiento en la enseñanza del concepto de logaritmo?

1.7 Objetivo

1.7.1 Objetivo general

Elaborar una propuesta de actividades didácticas utilizando la metodología de aprendizaje por descubrimiento en el objeto matemático de logaritmo, para estudiantes de segundo año de enseñanza media.

1.7.2 Objetivos específicos

Identificar la progresión de los objetivos de aprendizaje del concepto de logaritmo según los lineamientos del ministerio.

Caracterizar el tránsito histórico del concepto de logaritmo.

Diseñar una secuencia de actividades para la enseñanza de los logaritmos, en base al aprendizaje por descubrimiento.

2. CAPÍTULO 2: MARCO TEÓRICO

2.1 Introducción al capítulo

En este capítulo se estudiará el enfoque didáctico del aprendizaje por descubrimiento, a partir de la teoría de instrucción de Bruner, para luego abordar algunas definiciones formales respecto al currículum de educación chileno. Finalmente se abordará la epistemología del concepto de logaritmo, desde su origen histórico, áreas de aplicación y su fenomenología actual en el currículum nacional.

2.2 El aprendizaje por descubrimiento

El psicólogo norteamericano Jerome Bruner, dentro de sus trabajos se dedicó al estudio del desarrollo intelectual de los niños, surgiendo por parte de él, además de interés, una teoría del aprendizaje.

En el año 1961, Bruner da a conocer su teoría del aprendizaje por descubrimiento, donde propone que el aprendizaje significativo no va de la mano con un aprendizaje memorístico, lo cual implica que se debe promover la comprensión por sobre la memorización.

En adición a lo anterior, Bruner postula que el aprendizaje se construye sobre un procesamiento activo de la información y que este proceso no es igual para todas las personas. Para Bruner “El individuo atiende selectivamente a la información y la procesa y organiza de forma particular” (Arancibia et al., 1997, p. 95).

Otros autores como Barrón (1993), basándose en el trabajo de Bruner, define el aprendizaje por descubrimiento como “Una actividad autorreguladora de resolución de problemas, que requiere la comprobación de hipótesis como centro lógico del acto de descubrimiento”. Se puede desprender de esta definición que el descubrimiento gira en torno a la comprobación de una premisa, en este caso una hipótesis, la cual estaría orientada a la resolución de un problema.

2.2.1 Principios del aprendizaje por descubrimiento

En 1993, en la revista de Investigación y experiencias didácticas, Barrón (1993) expone los diez principios del aprendizaje por descubrimiento, basándose en los doce principios planteados por Bruner en 1996, los cuales se detallan a continuación.

I. El ser humano está dotado de potencialidad natural para descubrir el conocimiento.

Cada individuo al momento de aprender está dotado con la capacidad para autorregular su comportamiento, por lo cual puede desarrollar experiencias de aprendizaje por descubrimiento. En el proceso de aprendizaje participa el sujeto de manera integral, no solo sus capacidades intelectuales, sino que también las afectivas, psicomotoras, morales y sociales. De acuerdo a Barrón (1993), “La capacidad de autorregulación se desarrolla cuando el sujeto aplica sus sistemas cognitivos, comprensivos y actuacionales, mediante los que el sujeto interpreta la realidad, elabora sus expectativas, objetivos... y autorregula su intervención”. En base a lo anterior, se puede inferir que cuando un individuo descubre un conocimiento, no solo se ve comprometida su capacidad intelectual, sino que pone en práctica diversas capacidades personales, las cuales promueven el desarrollo de habilidades para la vida.

II. El resultado del descubrimiento es una construcción intrapsíquica novedosa.

Aunque el descubrimiento realizado por un individuo no sea relevante o novedoso para la sociedad, para el sujeto supondrá una reconstrucción novedosa para su sistema cognitivo.

Desde el punto de vista de la construcción del conocimiento, todo descubrimiento proviene de una serie de conocimientos previos, los cuales son diferenciados y coordinados con elementos nuevos, para configurar significados que sean novedosos (Piaget, 1970).

III. El aprendizaje por descubrimiento encuentra su punto de partida en la identificación de problemas.

De acuerdo a Barrón (1993), cuando las expectativas de un individuo respecto a una situación resultan frustradas o insuficientes para alcanzar un objetivo, se da forma a situaciones problemáticas que invitan al individuo a emprender el acto de descubrimiento. El descubrimiento es promovido por el deseo de enfrentar la dificultad o la incertidumbre de una determinada situación, en donde desde un proceso reflexivo del sujeto este extiende, diferencia o reformula las teorías previas para poder configurar otras nuevas.

IV. El aprendizaje por descubrimiento se desarrolla a través de un proceso de resolución significativa de problemas.

El aprendizaje por descubrimiento no proviene de secuencias inductivas derivadas netamente de la observación, sino que se da a través de un proceso constructivo de comprobación de teorías, surgiendo de la serie de acciones que el individuo ejerce sobre la situación problemática con la que se enfrenta.

V. El acto de descubrimiento encuentra su centro lógico en la comprobación de conjeturas.

A pesar de que el proceso de descubrimiento está relacionado al proceso de conceptualización y comprobación de hipótesis, ésta debe ser comprobada para que suceda el aprendizaje. Por tanto, es este criterio de comprobación el que determinará la lógica del aprendizaje por descubrimiento.

VI. Para que la actividad resolutive pueda ser caracterizada de descubrimiento ha de ser autorregulada y creativa.

Es el sujeto quien debe tomar las decisiones en el proceso de comprobación de hipótesis, lo que implica que el individuo esté en un proceso de autorregulación. Se debe permitir que el estudiante sea quien elija, organice, aplique y controle las estrategias y metodologías para cumplir con la fase de comprobación de hipótesis (Barrón, 1993). La actividad resolutive no solo debe ser autorregulada, sino que

también se debe utilizar el pensamiento productivo, además de la construcción de un hallazgo intrapersonal novedoso (Piaget, 1981).

VII. El aprendizaje por descubrimiento va asociado a la producción de errores.

El tratamiento didáctico del error por parte del educador debe ser un recurso que se utilice para potenciar el aprendizaje por descubrimiento. “A partir de la toma de conciencia del error por parte del estudiante se estimulará la elaboración de nuevas conjeturas y la construcción de nuevos conocimientos” (Barrón, 1989). Lo anterior, implica que el docente debe valorar positivamente el error de sus estudiantes y que debe gestionarlo con la finalidad de promover el descubrimiento.

VIII. Al aprendizaje por descubrimiento le es consustancial la mediación sociocultural.

Independiente de la experiencia cognoscitiva, a pesar de que ésta pueda desarrollarse de manera autónoma, ésta siempre se hallará mediada por las orientaciones socioculturales del individuo. En este apartado Barrón (1993), indica que a pesar de que el aprendizaje por descubrimiento es autorregulado, debe estar direccionado a que el estudiante experimente trabajos colectivos y colaborativos de aprendizaje, ya que pueden favorecer los descubrimientos cognitivos intrapersonales.

IX. El grado de descubrimiento es inversamente proporcional al grado de predeterminación del proceso resolutivo.

El grado de experiencia cognoscitiva del estudiante estará determinado por la capacidad de autonomía que este tenga en la resolución de un problema, ya que la necesidad de descubrimiento se presenta justamente en las situaciones donde el conocimiento no está determinado por indicaciones externas ni por recursos internos disponibles (Barrón, 1993). De acuerdo a Barrón, cuando existan indicaciones, ya sean internas o externas, que indiquen de una forma directa el proceso resolutivo de un problema o situación problemática, se verá anulada la actividad autorreguladora

de investigación, por lo que también se anulará la experiencia cognoscitiva del descubrimiento.

X. El aprendizaje por descubrimiento puede ser pedagógicamente promovido.

El maestro es el encargado de crear el ambiente y la situación que promueva el aprendizaje por descubrimiento, ya que para que este suceda será necesario apoyar al estudiante a adoptar actitudes de indagación, investigación y exploración (Barrón, 1993).

2.2.2 Teoría de la Instrucción de Bruner

De acuerdo a los principios del aprendizaje basado en descubrimiento, Bruner propone la teoría de la instrucción, la cual consideraba cuatro aspectos esenciales: la predisposición a aprender, la estructura y forma del conocimiento, secuencia de presentación y forma y frecuencia del refuerzo (Bruner, 1966). La teoría propuesta por Bruner es una de tipo prescriptiva o normativa, ya que establece los medios ideales para que el aprendizaje o crecimiento se produzca de la mejor manera posible (Arancibia et al. 1997, p. 97).

Los principios de la teoría de la instrucción de Bruner se detallarán brevemente a continuación:

2.2.2.1 Predisposición a aprender.

En su teoría, Bruner (1966) propone que el aprendizaje va a depender siempre de la exploración de alternativas, por lo tanto, una teoría de la instrucción debe poder explicar la activación, mantenimiento y dirección de esta conducta (Arancibia et al., 1997).

Activación

Para Bruner, este aspecto es el que explica la iniciación de la conducta de la exploración. Se basa principalmente en establecer un grado adecuado de incertidumbre sobre cierta

situación (Arancibia et al. 1997). En palabras de Bruner (1966) “La curiosidad (...) es una respuesta a la incertidumbre y la ambigüedad. Una tarea rutinaria provoca escasa exploración; una que es demasiado incierta puede generar confusión y ansiedad, con el efecto de reducir la exploración.” (Bruner, 1966, citado por Arancibia et al., 1997, p. 97).

Mantenimiento

Una vez que el profesor establece la conducta esperada en sus estudiantes, debe promover que ésta se mantenga. Para este propósito es necesario que los beneficios percibidos por el estudiante de explorar las alternativas sean mayores a los riesgos. De acuerdo a Bruner, aprender algo mediante la ayuda de un instructor debería, si es que la instrucción es exitosa, resultar menos arriesgado que hacerlo sólo, dicho de otra forma, que la exploración de alternativas erróneas debería resultar menos grave (Arancibia et al., 1997).

Dirección

La exploración de alternativas no debe ser azarosa, es decir, debe tener una dirección determinada. “Esta dirección depende de dos aspectos que interactúan entre sí: un sentido de finalidad (o meta) de la tarea y el conocimiento de la relevancia que tiene la exploración de alternativas para la consecución de dicho objetivo.” (Arancibia et al., 1997, p. 98). Lo anterior indica que para que la exploración sea exitosa, es necesario conocer al menos de forma aproximada el objetivo de la tarea y que se sepa si los caminos utilizados para la consecución de estos objetivos están siendo efectivos o no, es decir, un punto de referencia respecto a dónde se encuentra el sujeto respecto a estos objetivos.

2.2.2.2 Estructura y Forma del conocimiento.

Este aspecto de la teoría de la instrucción de Bruner considera la forma en la cual se presentará el conocimiento a los estudiantes. En síntesis, el autor plantea que el conocimiento debe ser entregado una forma lo suficientemente simple para que un estudiante pueda comprenderlo. La forma adecuada de la presentación del conocimiento dependerá de tres factores: el modo de representación, economía y poder. (Bruner,

1966). La adecuación de estas tres características dependerá en todo caso de las cualidades del estudiante y del contenido que se desee enseñar (Arancibia et al. 1997, p. 98).

Modo de representación

Cualquier dominio del conocimiento puede ser presentado de tres formas diferentes:

Representación Enactiva:

También conocida como fase ejecutora. Es el tipo de aprendizaje que se obtiene producto de un acto motriz (D' Amore, 2006).

Representación Icónica:

Es la etapa donde se pasa de lo concreto al mundo de las imágenes mentales abstractas. "En este tipo de representación el estudiante recuerda, re-imagina, una manipulación concreta ejecutada" (D' Amore, 2006, p. 171). En este tipo de representación el ícono no debe ser entregado por el educador, sino que debe ser el estudiante quien genere este esquema mental basado en la experiencia física considerada en la representación enactiva (Arancibia et al., 1997).

Representación Simbólica:

Esta representación se da cuando un conocimiento determinado se representa mediante proposiciones lógicas o simbólicas (Arancibia et al., 1997). Este es el nivel de representación más alto en términos cognitivos, mediante el cual el estudiante adquiere una nueva posibilidad de pensamiento abstracto (D' Amore, 2006).

De acuerdo a Bruner, estas formas de representación se desarrollan en la sucesión expuesta anteriormente: desde lo enactivo, luego pasando por lo icónica y finalizando en lo simbólico. Cada una de estas representaciones es necesaria para la fase sucesiva y se hallan conectadas entre ellas en modo evolutivo (D' Amore, 2006).

Economía

Este aspecto de la teoría de la instrucción se refiere a la cantidad de información que es necesaria para poder representar y procesar un conocimiento determinado. La economía dependerá en gran medida de escoger la forma adecuada de representación del conocimiento (Arancibia et al. 1997).

Poder efectivo

El poder efectivo de un conocimiento se refiere al valor generativo que éste pueda alcanzar (Arancibia et al. 1997). Por dar un ejemplo:

Si a un niño se le enseña el siguiente conjunto de proposiciones: “María es más alta que Ana, y Luisa es más pequeña que Ana” tendrán dificultades en decir si María es o no más alta que Luisa. Aunque, en términos lógicos, el poder generativo de las dos primeras proposiciones con respecto a esta última existe, no es lo mismo en términos “psicológicos” (Arancibia et al., 1997, p. 99).

En base a lo anterior, es necesario que el profesor descubra la forma de representar el conocimiento de una forma que su generatividad real iguale a aquella psicológica, lo que, en término del ejemplo citado, el estudiante sea capaz de llegar a la proposición “María es más alta que Luisa”.

2.2.2.3 Secuencia de Presentación.

La secuencia consiste en guiar efectivamente al estudiante a través de afirmaciones a cerca de un problema, de manera de que el profesor aumente la habilidad del estudiante para comprender, transformar y transferir lo que está aprendiendo. La secuencia con la que el estudiante enfrenta los materiales disponibles dentro de un determinado ámbito de conocimiento impactará en la dificultad que tendrá éste para adquirir el dominio de dicho conocimiento (Arancibia et al., 1997). Si bien de acuerdo a Bruner no hay una secuencia ideal para todos los estudiantes, plantea que generalmente será adecuado que la secuencia de aprendizaje replique la progresión desde lo enactivo a lo simbólico. En este caso, si el estudiante presenta un sistema simbólico de buen desarrollo, es posible saltarse los dos primeros modos de representación. (Arancibia et al., 1997).

2.2.2.4 Forma y Frecuencia del Refuerzo.

El aprendizaje depende en gran medida de que el estudiante pueda constatar los resultados en un momento y lugar determinado que le permitan corregir su desempeño (retroalimentación). La utilidad del refuerzo (o conocimiento de los resultados) dependerá de tres aspectos:

Momento en que se entrega la información

El proceso de resolución de problemas se puede entender como un ciclo compuesto por varios pasos, cada uno con sub objetivos. La comprobación de cualquier resultado intermedio debe llegar en el momento en que el estudiante compara los resultados de sus intentos con alguno de los criterios que se desean lograr. Si se realiza una constatación de resultados previo a este punto, el estudiante podría no comprenderlo o recibir una carga extra e innecesaria en la memoria. Por otra parte, si la constatación es tardía, se complicaría la elección de una nueva hipótesis o intento por parte del estudiante (Arancibia et al., 1997).

En adición a lo anterior, la información respecto a los resultados que se entrega al estudiante no sólo debe considerar información respecto al éxito o fracaso del subobjetivo o tarea particular que se esté trabajando, sino que también tendrá que indicar si este logro lo está conduciendo o no a través de la jerarquía de objetivos que se han fijado. (Arancibia et al, 1997).

Condiciones del alumno

Se refiere a la capacidad del estudiante de utilizar la retroalimentación de manera favorable para la consecución de los objetivos planteados. En este aspecto, se plantea que la retroalimentación es de escasa utilidad cuando el estudiante se encuentra en un estado de fuerte ansiedad. Otro estado en el cual la retroalimentación resulta poco útil es la denominada “fijeza funcional”, que es el estado en el cual el alumno utiliza la información para evaluar una sola y rígida hipótesis que, además, resulta ser incorrecta (Arancibia et al., 1997).

Forma en que se entrega

Para que la información entregada al estudiante respecto a su desempeño sea utilizada de manera correcta, es necesario que el estudiante pueda traducirla en su forma de enfrentar los problemas. Por ejemplo, “si el alumno está aprendiendo a realizar una tarea motriz, tal vez sea más apropiado hacerle una demostración que decirle en palabras lo que hizo mal y cómo debe hacerlo bien” (Arancibia et al., 1997, p. 101).

De acuerdo a Bruner, otro tipo de información que no sirve entregarle al estudiante es la que se presenta en forma negativa, es decir, información referida a “qué no es” un determinado concepto. El autor reconoce que en términos lógicos resulta útil explicar un concepto a partir de lo que no es este mismo, pero que en términos psicológicos esta información no es utilizada por los individuos (Arancibia et al. 1997).

Respecto al refuerzo, Bruner enfatiza en la importancia de no retroalimentar de manera que induzca a la dependencia del estudiante. Es importante no olvidar que “La instrucción es un estado provisional cuyo objetivo es hacer al alumno autosuficiente con respecto al problema que se enseña” (Arancibia et al., 1997, p. 101). Todo tipo de corrección traerá el riesgo de que el estudiante se vuelva permanentemente dependiente de la corrección del profesor, por ello, el profesor debe cuidar que sus correcciones promuevan la función correctiva por parte del mismo estudiante.

2.3 Currículum

De acuerdo a algunos autores, se define al currículum como “el conjunto de documentos que oficializan las autoridades educativas (noosfera) de un lugar y que fijan o proponen los programas de las asignaturas, contenidos mínimos, objetivos que deben alcanzarse, etc.” (Alsina, 2000, citado en Valenzuela y Dolores, 2012, p.49). Por lo que se entiende que el currículum son los lineamientos oficiales por el cual el estado, mediante el Ministerio de Educación, indica a las instituciones educativas y, por tanto, a los docentes, los contenidos que deben entregar a los estudiantes. Estos lineamientos vienen descritos en las bases curriculares, las cuales, de acuerdo el Ministerio de Educación de Chile, tienen la siguiente finalidad

Las Bases Curriculares indican cuáles son los aprendizajes comunes para todos los alumnos y todas las alumnas del país durante su trayectoria escolar. Dichas Bases tienen un carácter obligatorio para todos los establecimientos y son el referente respecto del cual se construyen los programas de estudio del Ministerio de Educación, los programas de estudios elaborados por los establecimientos que opten por programas propios, los planes de estudio, la prueba SIMCE y los estándares de aprendizaje (Mineduc, 2015).

Las bases curriculares se organizan en diferentes elementos, los cuales son los Objetivos de Aprendizaje (OA), Conocimientos, Habilidades, Actitudes y Objetivos de Aprendizaje Transversal (OAT), los cuales se definen brevemente a continuación.

Objetivos de aprendizaje

Para cada asignatura existen OA diferentes, los cuales indican “los aprendizajes terminales esperables para cada año escolar” (Mineduc, 2015). Estos objetivos hacen referencia a los conocimientos, habilidades y actitudes que se quieren trabajar con los estudiantes y los cuales permitirán a los estudiantes avanzar en su desarrollo integral.

Conocimientos

De acuerdo al Ministerio de Educación (2015), los conocimientos “corresponden a las redes de conceptos e información sobre hechos, procesos, procedimientos y operaciones” (Mineduc, 2015)

Habilidades

Las bases curriculares definen a las habilidades como las capacidades para realizar ciertas tareas y para solucionar problemas con precisión y adaptabilidad, las cuales pueden efectuarse de forma intelectual, psicomotriz o psicosocial (Mineduc, 2015).

Actitudes

Las actitudes son las disposiciones con las que los estudiantes responderán ante las diferentes actividades que se desarrollarán, las que son capaces de propiciar ciertos tipos de comportamientos o acciones por parte del estudiante (Mineduc, 2015). En este sentido, se puede entender la incorporación de las actitudes dentro de los OA como un elemento enmarcado dentro de la formación integradora o transversal, ya que “las actitudes afectan a todas las dimensiones de la vida” (Mineduc, 2015).

Objetivos de Aprendizaje Transversal (OAT)

Estos objetivos hacen referencia al desarrollo personal y social de los estudiantes, así como al desarrollo relacionado con el ámbito del conocimiento y la cultura (Mineduc, 2015). De acuerdo al Mineduc, el logro de los OAT dependerá de toda la gama de elementos que componen la experiencia escolar, independiente si sean curriculares o no, como por ejemplo las dinámicas de participación y convivencia escolar, el proyecto educativo institucional, los procesos de gestión curricular, entre otros.

2.4 Descripción epistemológica del logaritmo

Podemos entender la epistemología como una crítica razonada de la teoría científica: análisis de sus fundamentos, planos y dimensiones, conceptos claves, interacciones, opciones paradigmáticas, etc. Indicamos que no se trata de arte, ni de filosofía, ni de ideología, ni de discurso cotidiano, sino de saberes contrastables empíricamente y que aspiran a proponer modelos explicativos (Gómez, 2012).

Abordaremos el concepto de logaritmo a través de su historia, utilidad y fenomenología actual y definición experta.

2.4.1 Marco histórico

Contexto histórico

El concepto de logaritmo se desarrolla a partir de la comparación entre una progresión aritmética y una geométrica. La primera comparación se remonta a la figura de Arquímedes (287 aC. - 212 aC.), uno de los más grandes matemáticos y científicos de todos los tiempos.

Los matemáticos griegos como Pitágoras, Tales de Mileto, Euclides entre otros, consideraban la matemática como una entidad abstracta que permitía estudiar el orden perfecto del universo, pero que carece de utilidad práctica (Martínez et al., 2013).

Las transformaciones desde la Edad Media a la modernidad, se enmarcaron con la decadencia del feudalismo en Europa, en donde surgió una nueva clase social, la burguesía. Esta clase comenzó a otorgar préstamos con intereses. El capitalismo, el cual estimula la acumulación de riquezas y justifica el lucro, va tomando fuerza, además por los grandes descubrimientos geográficos que permiten a algunos puertos europeos convertirse en pequeñas capitales financieras y bancarias. En relación a la ciencia, se gesta un proceso de secularización, en donde el científico es por lo general burgués. El hombre comienza a experimentar observando la naturaleza, utilizando la razón como principal herramienta. La matemática, antes casi inactiva en Europa desde el siglo IV d.C.

Afortunadamente, los árabes, que tradujeron los antiguos manuscritos griegos, guardaron estos, además de agregar sus propios conocimientos. Italia abre el camino con Scipio Ferro (1465-1526), Niccolo Fontana -apodado Tartaglia- (1500-1557) y Girolamo Cardano (1501-1576). En Alemania surgen Stifel, Durero y Copérnico. La escena se traslada nuevamente a Italia con Galileo Galilei (1564-1642). Vivió en esta época también el gran astrónomo alemán Johann Kepler (1571-1630). En la última mitad del siglo XVI Francia produce a François Viète, Escocia a John Napier y en Suiza nace Jobst Burgi (Moreno, 2003).

A partir del siglo XVI surgió la necesidad de precisar cálculos numéricos debido a la expansión comercial y al perfeccionamiento de las técnicas de navegación. Era menester encontrar algoritmos más sencillos que los utilizados hasta esa época.

El descubrimiento de los logaritmos no fue concebido por un único proceso. Existen dos caminos: los cálculos trigonométricos para las investigaciones astronómicas aplicables a la navegación, y el cálculo de las riquezas acumuladas (interés compuesto). Ambos caminos inspiraron respectivamente a John Napier y a Jobst Bürgi en el descubrimiento de los logaritmos (Moreno, 2003).

Concepto logaritmo

Napier introdujo el concepto de logaritmos en el año 1614, que proviene del griego “logos” y “arithmos”. Logos significa razón o proporción, y arithmos número (Moreno, 2003).

Napier definió los logaritmos desde un enfoque mecánico. Relacionó dos líneas, una finita y otra indefinida, por estas se mueven dos puntos con velocidades relacionadas entre sí. La idea detrás de esto es construir una secuencia de números, de tal manera que, cuando una línea creciera en progresión aritmética, la otra decreciera en una progresión geométrica. Mediante esta relación, la multiplicación se reduce a una simple suma. A pesar de este importante descubrimiento, las secuencias propuestas por Napier no eran satisfactorias en su totalidad. Fue otro matemático que encontró una solución (Cervera, 2004).

Tablas decimales

Briggs (1561–1630), nació en Londres. Fue profesor de matemática en Oxford desde el año 1619 y 18 después en Londres. Se hizo amigo de Napier, conoció su obra y compartió con él la idea y las ventajas de los logaritmos decimales (Impellizere, 2003).

Las tablas de Napier, aparecidas en 1614, causaron un gran impacto en toda Europa, pero especialmente en Henry Briggs, en conjunto llegaron a la conclusión de que el logaritmo de 1 debía ser igual a 0, mientras que el logaritmo de 10 debía ser igual a 1. Así nacen los logaritmos de base ordinaria o logaritmos de Briggs. La tarea de construir la primera tabla de logaritmos en base 10 fue asumida por Briggs, puesto que Napier no poseía ya fuerzas para emprender un trabajo de esa envergadura (Cervera, 2004).

Por otra parte, Briggs elaboró una tabla de logaritmos decimales. En el año 1617 publicó una tabla de ocho cifras, tomando en cuenta números desde el 1 hasta el 1000 (Impellizere, 2003).

Función logarítmica

el astrónomo Edmund Gunter aplicó la idea de los logaritmos a las escalas de cálculo en su canon triangulorum, dando lugar a las primeras aplicaciones matemáticas de la escala logarítmica (Higuera, 2016).

2.4.2 Utilidad de los logaritmos

“La utilidad de los logaritmos fue apreciada por la comunidad científica, desde el siglo XVII hasta mediados del siglo XX, y su uso se extendió por todo el mundo.” (Campusano, 2016).

Los logaritmos son fundamentales para el avance y desarrollo de la ciencia, dada su aporte a la simplificación de cálculos. Sus aportes se reflejan en disciplinas tales como: la astronomía, la navegación marítima, en la economía, en la música, en la topografía, en la biología, en la geología, en la medicina, entre otros (Sanabria y Costa, 2016).

Se muestran algunas aplicaciones de logaritmos en diferentes disciplinas, obtenidos de Sanabria (2016) de la investigación titulada “Una propuesta didáctica para el estudio del concepto logaritmo en el marco de la teoría antropológica de lo didáctico”

En Astronomía

La magnitud absoluta “ M ” es la magnitud aparente “ m ” que tiene un objeto si estuviera a una distancia de 10 parsecs (aproximadamente 32,616 años luz o $3 \times 10^{14} km$). La magnitud aparente de un cuerpo celeste, planeta o estrella es una medida de su brillo, es decir, de la cantidad de luz que se recibe de dicho objeto. La fórmula que permite establecer la magnitud absoluta es:

$$M = m + 5 \cdot \log d$$

donde d es la distancia en parsecs (Camarero y García, 2014).

En Química

El pH (potencial de hidrógeno) es una medida de acidez o alcalinidad de una disolución. El pH indica la concentración de iones hidronio $[H^+]$ presentes en determinadas sustancias. Este término fue acuñado por el químico danés Sørensen, quien lo definió como el logaritmo negativo en base 10 de la actividad de los iones hidrógeno. Esto es (Sanabria, 2016):

$$pH = -\log (H^+)$$

En geología

Los logaritmos se utilizan para medir los movimientos sísmicos. Una escala habitualmente utilizada en la medición de la intensidad de los sismos es la escala Richter y mide la energía liberada por el movimiento de rotura de las rocas. La relación entre la magnitud del " M " del sismo y la energía liberada " E ", es:

$$\log E = 1,5 \cdot M - 1,74$$

Se deduce de esta igualdad que un aumento de un punto en la escala de medida equivale a multiplicar, aproximadamente por 30 la energía liberada en la situación anterior.

Los grados en la escala de Richter de intensidad se calculan mediante la expresión

$$R = \log \left(\frac{A}{p} \right)$$

donde A es la amplitud medida en micrómetros ($1 \text{ micrómetro} = 10^{-4} \text{ cm}$) y p es el período medido en segundos (Sanabria, 2016).

En psicología

Según la ley de Fechner (Fontes y Fontes, 1994) mientras que la intensidad de una sensación crece en progresión aritmética, el estímulo crece en progresión geométrica. La formulación matemática de esta ley es la siguiente:

$$S = K \cdot \ln E + C$$

siendo S la sensación, E el estímulo y K es una constante, la constante de Weber, distinta para cada modalidad sensorial.

Otra de las aplicaciones en la psicología es un modelo para describir el tiempo de aprendizaje de una serie de símbolos por una persona está dada por la ecuación:

$$-\frac{\ln\left(1 - \frac{S}{N}\right)}{k} = t$$

donde para cada persona N y k se determinan empíricamente y S es el número de símbolos a aprender en horas

En la música

Logaritmo y la Música: Los grados de tonalidad de la escala cromática no son equidistantes por el número de vibraciones ni por la longitud de onda de sus sonidos, sino que representan los logaritmos en base 2 de estas magnitudes (Sanabria, 2016). Considerando que la nota *do* de la octava más baja, que representaremos por cero, está determinada por n vibraciones por segundo. El *do* de la primera octava producirá $n \cdot 2^1 = n \cdot 2$ vibraciones, el *do* de m -ésima octava producirá $n \cdot 2^m$ vibraciones cada segundo. Si hemos llamado cero a *do*, y seguimos numerando las notas, tendremos que sol será la 7ª, la será la 9ª, la 12ª será de nuevo *do*, en una octava más alta, etc. Como en la escala cada nota tiene $\sqrt[12]{2}$ más vibraciones que las anteriores, entonces el número de éstas en cualquier tono se puede expresar con la fórmula:

$$N_{pm} = n \cdot 2^m \left(\sqrt[12]{2}\right)^p$$

donde p es la ubicación de la nota de la escala cromática y N_{pm} es el número de vibraciones (Sanabria, 2016). Al tomar el número de vibraciones del do más bajo como unidad ($n = 1$) y aplicando los logaritmos a base 2, se tiene que:

$$\log_2 N_{pm} = m + \frac{p}{12}$$

En el tono la de la segunda octava; 2 es la característica del logaritmo del número de vibraciones y $\frac{9}{12}$ la mantisa del mismo logaritmo en base 2. Así $2 + \frac{9}{12} \approx 2,66$ y el número de vibraciones es $2^{2,66} = 6,32$ veces mayor que las del tono do de la 1ª octava. Por tal motivo, los pentagramas tienen relación con la escala logarítmica.

En la arqueología

Los arqueólogos utilizan los logaritmos cuando datan la antigüedad de los restos orgánicos por el método del carbono 14 (C_{14}) (Sanabria, 2016). La velocidad de desintegración del C_{14} en la materia se relaciona con su edad a través de la siguiente ecuación:

$$t = \frac{T_{1/2}}{-\ln 2} \cdot \ln \left(\frac{N_f}{N_0} \right)$$

Donde N_0 es la cantidad de C_{14} original del fósil al morir; N_f es la cantidad de C_{14} final del fósil al encontrarlo, $T_{1/2} = 5760$ años es el período de semidesintegración del y es el tiempo estimado de antigüedad del fósil. De acuerdo a Sanabria (2016), otra fórmula que es utilizada para determinar la antigüedad de un fósil es:

$$t = \frac{\log \left(\frac{N_f}{N_0} \right)}{\log 0,886}$$

2.4.3 Fenomenología actual

Respecto a cómo perciben los profesores y estudiantes el concepto de logaritmo, se plantea que:

Al estudiar el discurso matemático escolar encontramos que varias son las herramientas matemáticas, que profesores y alumnos han desarrollado en su vida escolar, respecto a los logaritmos, que evidencian la compleja apropiación de esta noción. Si preguntáramos a algunos docentes, que imparten el curso de Álgebra en el Bachillerato, sobre sus experiencias en torno a la enseñanza de los logaritmos, escucharíamos que es una noción difícil para los alumnos; que debido a que Álgebra, en sí, es compleja y su programa extenso, demanda más tiempo para transmitir las nociones que conlleva este curso, prefiriendo ahondar en ideas previas al logaritmo. Rara vez logran abordar la enseñanza de los logaritmos pues, en general, son el último tema del programa y una de las nociones que se evita (Ferrari y Farfán, 2007, p. 497).

En el marco del currículum chileno actual, el objetivo de aprendizaje de logaritmos para segundo año medio, es solo una herramienta de relación con otros objetos matemáticos. A continuación, se presenta el objetivo de aprendizaje de logaritmos en la primera unidad para segundo medio (MINEDUC, 2016).

Mostrar que comprenden las relaciones entre potencias, raíces enésimas y logaritmos:

- Comparando representaciones de potencias de exponente racional con raíces enésimas en la recta numérica.
- Convirtiendo raíces enésimas a potencias de exponente racional y viceversa.
- Describiendo la relación entre potencias y logaritmos.
- Resolviendo problemas rutinarios y no rutinarios que involucren potencias, logaritmos y raíces enésimas

En Ferrari (2001) encontramos que la presentación escolar de los logaritmos, absolutamente escindida de sus orígenes, vaciada de significados, nos confiere una primera explicación del por qué los alumnos no logran articular las diferentes presentaciones de los logaritmos, nos estamos refiriendo a su presentación primera como “el exponente al que se debe elevar una base para obtener determinado valor”, a su íntima vinculación con las exponenciales “al ser una función inversa de la otra” y por último ser la “respuesta de una integral singular” que se escapa de un patrón, sin olvidar su desarrollo en serie de potencias también presente en el discurso matemático escolar.

Como se verá en el marco metodológico, la forma de abordar el concepto de logaritmos en el texto de estudio de segundo medio es mediante la ejercitación de las propiedades expuestas en la definición experta de este apartado.

2.4.4 Definición experta

Según Jiménez (2013, p.177):

Teorema 57. Sea $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$, entonces la función exponencial en base a es biyectiva, por lo tanto, existe la función inversa.

Definición 46. La función inversa de la exponencial en base a se llama función logaritmo en base a y la denotaremos como $\log a$, es decir:

$$\log_a(x) = y \Leftrightarrow \exp_a(y) = x$$

Si $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ podemos definir la función como:

$$\log_a: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow \log_a(x) = y$$

Las gráficas correspondientes son:

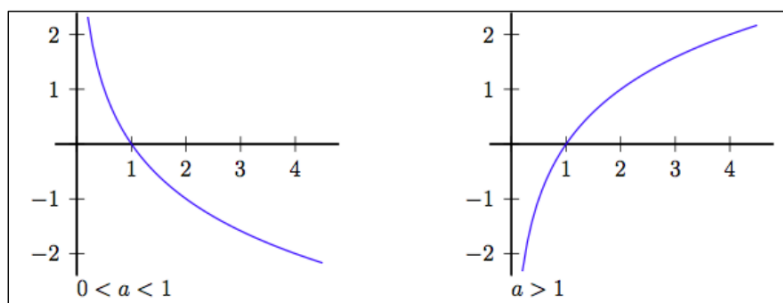


Figura 2.1 Gráficas de funciones logarítmicas. Fuente: Jiménez, 2013, p.177

Propiedad 58. Sean $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$, $x, y \in \mathbb{R}^+$, $r \in \mathbb{R}$ entonces

1	$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$
2	$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$
3	$\log_a(x^r) = r \log_a(x)$
4	$\log_a(1) = 0$
5	$\log_a(a^r) = r$
6	$\log_a(x) = \log_a(y) \Leftrightarrow x = y$
7	Si $0 < a < 1$ entonces $\log_a$ es una función decreciente.
8	Si $a > 1$ entonces $\log_a$ es una función creciente.

Tabla 2.1 Propiedades de los logaritmos. Fuente: Jiménez 2013

Demostración:

Para la demostración de las propiedades 1,2 y 3 de la Tabla 4.1. Sea $u = \log_a(x)$ y

$v = \log_a(y)$, entonces $a^u = x$ y $a^v = y$

Para (1) tenemos que

$$\log_a(xy) = \log_a(a^u a^v) = \log_a(a^{u+v}) = u + v$$

Luego

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$$

En (2)

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(a^u a^{-v}) = \log_a(a^{u-v}) = u - v$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$$

En (3)

$$\log_a(x^r) = \log_a(a^u)^r = \log_a(a^{ru}) = ru$$

$$\log_a(x^r) = r \log_a(x)$$

Teorema 59 (cambio de base). Sean $a, b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}, x \in \mathbb{R}$, entonces

$$\log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}$$

Demostración:

Sea $u = \log_a(x)$ y $v = \log_b(x)$ entonces $a^u = x$ y $b^v = x$, así tenemos:

$$a^u = b^v$$

$$\log_a(a^u) = \log_a(b^v)$$

$$u = v \log_a(b)$$

$$\log_a(x) = \log_b(x) \cdot \log_a(b)$$

$$\log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}$$

3. CAPÍTULO 3: MARCO METODOLÓGICO

3.1 Introducción al capítulo

En este capítulo se explica el enfoque metodológico de esta investigación, para luego estudiar cómo progresan a través de los niveles, de acuerdo al Ministerio de educación, los objetivos de aprendizaje relacionados al concepto de logaritmo. Posteriormente, se realizará una revisión del contenido de logaritmos en los textos de estudio de segundo año medio, para finalmente presentar el formato de las actividades didácticas elaboradas a partir de la teoría de la instrucción de Bruner.

3.2 Enfoque de investigación

El enfoque de esta investigación es de tipo cualitativo, ya que “permite comprender los fenómenos y explorarlos desde la perspectiva que tienen los participantes en un ambiente natural y dentro de su contexto” (Hernández et al., 2014, p. 358). Los objetivos de la investigación es comprender cómo es abordado el concepto de logaritmo en segundo año de enseñanza media, en base al programa de estudios presentado por el Ministerio de Educación, junto con analizar también los fundamentos del aprendizaje por descubrimiento, para desarrollar una serie de actividades didácticas basadas en los fundamentos de la teoría de instrucción de Bruner.

3.3 Progresión del contenido logaritmo en el currículum chileno

En este apartado se realizará una revisión de los documentos curriculares que guían la enseñanza directa o indirecta (como conocimientos previos) del concepto de logaritmo, con la finalidad de entender los lineamientos del Mineduc para lograr desarrollar una propuesta de actividades didácticas acorde a los objetivos de aprendizaje vigentes para segundo año de educación media relacionado con este concepto.

3.3.1 Logaritmos en el programa de estudio

De acuerdo al programa de estudio de la asignatura de Matemática para el segundo año de enseñanza media, los elementos curriculares propuestos por el ministerio para el aprendizaje de logaritmos se detallan en la siguiente tabla:

Objetivo de aprendizaje	OA 02. Mostrar que comprenden las relaciones entre potencias, raíces enésimas y logaritmos: • Comparando representaciones de potencias de exponente racional con raíces enésimas en la recta numérica. • Convirtiendo raíces enésimas a potencias de exponente racional y viceversa. • Describiendo la relación entre potencias y logaritmos. • Resolviendo problemas rutinarios y no rutinarios que involucren potencias, logaritmos y raíces enésimas.
Indicadores de evaluación	• Relacionan y caracterizan las raíces por medio de potencias de exponente racional. • Derivan y determinan propiedades relativas a multiplicaciones y divisiones con raíces. • Resuelven problemas que involucren raíces y números racionales. • Establecen relaciones entre potencias, raíces y logaritmos. • Comparan representaciones de potencias con exponente racional, con raíces enésimas, y las representan en la recta numérica. • Explican la relación entre potencias y logaritmos. • Convierten desde un tipo de registro a otro; es decir, desde potencias a raíces y viceversa, y desde potencias a logaritmos y viceversa. • Resuelven problemas rutinarios y no rutinarios que involucran logaritmos.
Habilidades	• Resolver problemas utilizando estrategias como las siguientes: - Simplificar el problema y estimar el resultado. - Descomponer el problema en subproblemas más sencillos. - Buscar patrones. - Usar herramientas computacionales. (OA a)

	• Evaluar el proceso y comprobar resultados y soluciones dadas de un problema matemático. (OA b) • Fundamentar conjeturas usando lenguaje algebraico para comprobar o descartar la validez de los enunciados. (OA f) • Representar y ejemplificar, utilizando analogías, metáforas y situaciones familiares, para resolver problemas. (OA o)
Actitudes	• Demostrar interés, esfuerzo, perseverancia y rigor frente a la resolución de problemas y la búsqueda de nuevas soluciones para problemas reales. (OA C) • Trabajar en equipo, en forma responsable y proactiva, ayudando a los otros, considerando y respetando los aportes de todos, y manifestando disposición a entender sus argumentos en las soluciones de los problemas. (OA D)

Tabla 3.1 Propuesta curricular de la enseñanza de logaritmos en segundo año de educación media en Chile. Fuente: Mineduc 2016

A partir de la lectura de la Tabla 3.1, se entiende que, según el objetivo planteado, el aprendizaje que se desea lograr respecto a los logaritmos, trabaja a partir de la relación que existe con los conceptos de potencia y raíz, lo que permite visualizar que el concepto de logaritmo está planteado como una herramienta matemática que sirve para simplificar los procesos de cálculo. Sin embargo, más adelante se explica la sugerencia realizada por el currículum para abordar el contenido para los estudiantes, la que se encuentra mecanizada y carente de contexto histórico. A partir de los indicadores de evaluación se observa que lo que se busca en este objetivo respecto a los logaritmos, además de establecer relaciones con potencias y raíces, es que los estudiantes también sean capaces de explicar estas mismas relaciones, lo que podría dar pie a que un docente explique el contenido de logaritmos desde un punto de vista histórico, en cómo nace el concepto de logaritmo a partir de una necesidad de cálculo de la época y en cómo los logaritmos se crean a partir de tablas de potencias.

Sin embargo, respecto a lo mencionado anteriormente, Ampuero y Rebolledo (2019) comentan en su trabajo que, a partir del análisis realizado a las actividades propuestas en el programa de estudio de matemáticas para segundo medio (Mineduc, 2016), la mayoría de actividades propuestas respecto al concepto de logaritmo son del tipo de “competencias de reproducción”, de acuerdo a una categorización de actividades creada para un informe de la Prueba PISA (OCDE, 2005). Estas competencias de reproducción se refieren a ejercicios que:

Son relativamente familiares y que exigen básicamente la reproducción de los conocimientos practicados, como el conocimiento de representaciones de hechos y problemas comunes, el reconocimiento de equivalentes, el recuerdo de objetos y propiedades matemáticas familiares, la utilización de procesos rutinarios, la aplicación de algoritmos estándar y habilidades técnicas, el manejo de expresiones que contienen símbolos y fórmulas familiares o estandarizadas y la realización de operaciones sencillas. (OCDE, 2005, p. 41-42)

Respecto a los conocimientos previos que un estudiante debería dominar para poder abordar satisfactoriamente el OA 02 de matemática de segundo medio, resumimos en la siguiente tabla los objetivos de aprendizaje y sus respectivos indicadores.

Séptimo año de enseñanza básica	
Objetivo de aprendizaje	Indicadores de evaluación
OA5. Utilizar potencias de base 10 con exponente natural: • Usando los términos potencia, base, exponente, elevado. • Definiendo y usando el exponente 0 en el sistema decimal.	• Representan potencias de base 10 de manera concreta, pictórica y simbólica. • Reconocen potencias como productos de factores iguales, identificando la base y el exponente. • Transforman potencias de base 10 en números naturales y viceversa. • Descomponen números en potencias de base 10.

• Expresando números naturales en notación científica (sistema decimal). • Resolviendo problemas, usando la notación científica.	• Identifican los valores posicionales del sistema posicional como potencias y completan tablas posicionales. • Describen la relación entre los números escritos en sistema métrico decimal y su notación científica. • Resuelven problemas que involucran notación científica.
Octavo año de enseñanza básica	
Objetivo de aprendizaje	Indicadores de evaluación
OA3. Explicar la multiplicación y la división de potencias de base natural y exponente natural hasta 3, de manera concreta, pictórica y simbólica.	• Representan potencias de base y exponente natural hasta 3 con material concreto, como candados con clave de dígitos, trompo poligonal con números, dados didácticos, diagramas de árbol, etc. • Representan pictóricamente la multiplicación de potencias de igual base o de igual exponente natural hasta 3. • Representan la división de potencias de igual base o de igual exponente natural hasta 3. • Descubren, comunican y aplican las propiedades de la multiplicación y división de potencias, incluyendo el significado del exponente cero, en forma pictórica o simbólica. • Representan la potencia de potencia de manera concreta (combinación de máquinas que amplifican imágenes). • Relacionan situaciones reales con multiplicación, división y potencias de potencias. • Resuelven ejercicios rutinarios, aplicando la multiplicación, la división y la potenciación de potencias.

Primer año de enseñanza media	
Objetivo de aprendizaje	Indicadores de evaluación
OA2. Mostar que comprenden las potencias de base racional y exponente entero: • Transfiriendo propiedades de la multiplicación y división de potencias a los ámbitos numéricos correspondientes. • Relacionándolas con el crecimiento y decrecimiento de cantidades. • Resolviendo problemas de la vida diaria y otras asignaturas.	• Reconocen que la potencia de potencia es una multiplicación iterativa. • Reconocen el significado del exponente 0 y de los exponentes enteros negativos. • Aplican las propiedades de la multiplicación, la división y la potenciación de potencias en ejercicios. • Modelan procesos de crecimiento y decrecimiento en Economía y en Ciencias Naturales. • Resuelven problemas de la vida diaria y de otras asignaturas, relacionados con potencias de base racional y exponente entero.

Tabla 3.2 Objetivos de aprendizaje e indicadores de evaluación de contenidos previos relacionados a logaritmos. Fuente: Unidad de Currículum y Evaluación (s.f.)

Como se puede observar en la Tabla 3.2, el contenido de potencias es abordado con profundidad desde niveles anteriores, explorando las propiedades de éstas para luego aplicarlas en resolución de problemas de la vida diaria y otras asignaturas, por lo que para los estudiantes resulta necesario dominar las potencias y sus propiedades para lograr aprender los fundamentos de los logaritmos.

En la tabla 3.3 se presentan los Objetivos de aprendizaje de 3° y 4° año de educación media, donde podemos destacar que se continúa en parte con el desarrollo de actividades relacionadas con logaritmos, en la cual los alumnos tendrán que aplicar

modelos matemáticos que involucren en cierta forma las funciones exponenciales y logarítmicas. En tanto, en 4° año medio, se continúa construyendo modelos, pero enfocadas a planteamientos que involucren funciones de exponente entero.

Tercer año de enseñanza media	
Objetivo de aprendizaje	Indicadores de evaluación
OA3. Aplicar modelos matemáticos que describen fenómenos o situaciones de crecimiento y decrecimiento, que involucren las funciones exponencial y logarítmica, de forma manuscrita, con uso de herramientas tecnológicas y promoviendo la búsqueda, selección, contrastación y verificación de información en ambientes digitales y redes sociales	Sin indicadores de evaluación
Cuarto año de enseñanza media	
Objetivo de aprendizaje	Indicadores de evaluación
OA3. Construir modelos de situaciones o fenómenos de crecimiento, decrecimiento y periódicos que involucren funciones potencias de exponente entero y trigonométricas $\sin(x)$ y $\cos(x)$, de forma manuscrita, con uso de herramientas tecnológicas y promoviendo la búsqueda, selección, contrastación y verificación de información en ambientes digitales y redes sociales.	Sin indicadores de evaluación

Tabla 3.3 Objetivos de aprendizaje e indicadores de evaluación de contenidos post enseñanza de logaritmos. Fuente: Unidad de Currículum y Evaluación (s.f.)

3.4 Texto de estudio

Para la elaboración de la propuesta de actividades didácticas, resulta importante analizar el cómo es abordado el contenido de logaritmos en el texto de estudios de segundo medio. En general la presentación de los contenidos considera una activación de conocimientos previos, como lo son el manejo de potencias y raíces, para luego introducir el concepto de logaritmo, con una metodología similar a la sugerida por la teoría de Bruner, seguida de sus propiedades, cada una con una actividad para que el estudiante logre verificar estas mismas. Finalmente, el libro presenta casos de aplicación de los logaritmos abordando diversas áreas del conocimiento, tales como la biología, física, química, entre otras.

En los textos entregados por el MINEDUC y estudiados hoy en día por los estudiantes, se presentan contenidos relacionados con logaritmos, en la cual predominan contenidos referidos a propiedades y definiciones, entre otros. Cabe resaltar que estos contenidos se encuentran antes de las actividades a realizar, como resumen de los contenidos abordados en la unidad.

En el texto analizado, se presenta la definición de logaritmo al inicio de la unidad mediante la siguiente figura y con el siguiente ejercicio:

Definición de logaritmos

¿A qué número es necesario elevar 2 para obtener $\sqrt{2}$?

¿Qué ecuación plantearías para resolver el problema anterior?

Objetivo: Identificar los logaritmos y su relación con las potencias.

1. En parejas, observen las relaciones descritas por los siguientes jóvenes referidas a la expresión $4^5 = 1024$.

- a. En cada caso, describan la relación usando las tres interpretaciones señaladas.

$$2^8 = 256 \quad 3^6 = 729 \quad 5^4 = 625$$



- b. Completen la tabla siguiendo el ejemplo.

Potencia	Base	Exponente	Logaritmo
$8^3 = 512$	8	3	$\log_8(512) = 3$
$10^4 = 10000$	6	-2	$\log_9(1) = 0$
			$\log_{64}(4) = \frac{1}{3}$

Figura 3.1 Relación potencia, Raíz y logaritmo. Fuente: Díaz et al. 2020.

Se puede ver que, en lugar de abordar en la definición real del logaritmo, se aborda mediante una asociación con las potencias y raíces, tal como lo plantea el Objetivo de Aprendizaje N° 02 de segundo año de enseñanza media.

Se presenta una tabla donde el estudiante tiene que identificar la base y exponente de una potencia con el respectivo logaritmo, dándose la primera fila de ejemplo y dejando diversos apartados de la tabla sin completas, para que el estudiante transite entre la representación de potencia y logaritmo en ambos sentidos.

Luego de la actividad anterior se introduce la definición formal de logaritmo, estableciendo una relación con las potencias, resaltando que el valor numérico del logaritmo es el exponente de una potencia, cuya base coincide con la base del logaritmo. Esto es posible verlo en la siguiente figura:

● Se llama logaritmo de base b de a al número c al cual debe elevarse la base b para obtener a . Es decir:

$$b^c = a \leftrightarrow \log_b a = c \quad \text{Con } a, b \in \mathbb{R}^+, b \neq 1 \text{ y } c \in \mathbb{R}.$$

Por ejemplo: $5^3 = 125 \leftrightarrow \log_5 125 = 3$ y se lee "logaritmo en base 5 de 125".

Para relacionar una potencia, un logaritmo y una raíz enésima, se tiene lo siguiente:

$$\sqrt{9} = 3 \leftrightarrow 9^{\frac{1}{2}} = 3 \leftrightarrow \log_9 3 = \frac{1}{2}$$

b se denomina base del logaritmo y a se denomina argumento.
Si $b = 10$, se habla de logaritmo decimal o común y en lugar de " $\log_{10}$ " se escribe simplemente "log".

Figura 3.2 Definición de logaritmo. Fuente: Díaz et al. 2020.

En el texto del estudiante de segundo año medio del 2022 se modelan las propiedades de la siguiente forma:

Propiedad 1

● Si a es un número real positivo distinto de 1, entonces se cumplen las siguientes propiedades:

- Logaritmo de la base: $\log_a a = 1$
- Logaritmo de la unidad: $\log_a 1 = 0$

1. ♦ Utilizando las propiedades anteriores responde:
 - a. Comprueba cada propiedad con 3 valores distintos de a .
 - b. Demuestra las propiedades anteriores planteándolas como potencias. Utiliza, para ello, la definición de logaritmo.

▶ ♦ ¿Qué propiedades de potencias utilizaste para realizar la actividad anterior? Identifícalas y coméntalas con tu curso.

Figura 3.3 Propiedad logaritmo de la base y logaritmo de la unidad. Fuente: Díaz et al. 2020.

La actividad anterior está enmarcada dentro de una lección que tiene por objetivo "Comprender y verificar las propiedades de los logaritmos" (Díaz et al., 2020, p. 30) donde se van planteando diversas situaciones y luego se orienta a los estudiantes con preguntas que promuevan la comprensión de los conceptos, como también se puede observar en la figura 3.4.

Propiedad 2

2. ♦ Analiza el siguiente procedimiento. Luego, realiza las actividades:

Si $\log_b a = c$, entonces $b^c = a$

PASO 1: Elevamos a n ambos lados de la igualdad: $(b^c)^n = a^n \rightarrow b^{c \cdot n} = a^n$

PASO 2: Utilizando la definición de logaritmo: $\log_b(a^n) = n \cdot c$

PASO 3: Reemplazamos c por $\log_b a$: $\log_b(a^n) = n \cdot \log_b a$

a. ¿Qué propiedades de potencias se utilizaron? Nómbralas.

b. Comprueba cada propiedad con 3 valores distintos de a y n .

● Sean b y x números reales positivos con $b \neq 1$ y n un número real, se cumple la propiedad de **logaritmo de una potencia de la base**:

$$\log_b(x^n) = n \cdot \log_b(x)$$

Figura 3.4 Propiedad del logaritmo de una potencia de la base. Fuente: Díaz et al. 2020.

La siguiente propiedad (la tercera presentada), mostrada en la figura 3.6 se presenta luego de mostrar una tabla logarítmica seguida de un algoritmo en el que se realiza una multiplicación de números de grandes cifras mediante la ayuda de esta (tabla 3.5). Esto busca, además de permitir que el estudiante verifique la propiedad del logaritmo, mostrar brevemente la génesis del concepto de logaritmo, como herramienta matemática que facilitaba los cálculos de números con grandes cifras previo a la invención de las calculadoras.

5. Calcula el valor de los logaritmos utilizando el siguiente razonamiento.

En los cálculos necesarios para el desarrollo de la astronomía, se presentaban operaciones como $65\,536 \cdot 16\,384$. Como se puede ver, los factores eran bastante grandes, lo que podía conducir a múltiples errores. Entonces, John Napier inventó "números artificiales" (logaritmos) que utilizaba para simplificar las operaciones de la siguiente forma:

PASO 1: Transformaba ambos números a una potencia de base común:

$$4^8 = 65536 \qquad 4^7 = 16384$$

PASO 2: Utilizando sus "números artificiales", transformaba la multiplicación en suma:

$$\begin{aligned} \log_4(65536 \cdot 16384) &= \log_4(65536) + \log_4(16384) \\ &= \log_4 4^8 + \log_4 4^7 \\ &= 8 + 7 \\ &= 15 \end{aligned}$$

PASO 3: Así, en vez de calcular $65\,536 \cdot 16\,384$, obtenía el mismo resultado mediante la potencia de 4^{15} , el cual se buscaba en las tablas de potencias que había construido.

Vega, G. (1797).
Tablas logarítmicas-trigonométricas
(2. verb., verm. und gänzlich umgearb. Aufl. ed.).
Leipzig: Weidmannsche Buchhandlung.

a. $\log_6(6 \cdot 36)$

d. $\log_6(1296 \cdot 36)$

g. $\log_{11}(11 \cdot 1331)$

b. $\log_4(16 \cdot 256)$

e. $\log_4(256 \cdot 4)$

h. $\log_8(64 \cdot 32768)$

c. $\log_3(9 \cdot 81)$

f. $\log_5(25 \cdot 3125)$

i. $\log_5(5 \cdot 390625)$

Figura 3.5 Actividad que presenta el algoritmo de uso de una tabla logarítmica. Fuente: Díaz et al. 2020

Sean b , x y y números reales positivos con $b \neq 1$, entonces:

$$\log_b(x \cdot y) = \log_b x + \log_b y$$

$$\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b x - \log_b y$$

Dicho de otra forma, el logaritmo de un producto es la suma de los logaritmos de los factores manteniendo la misma base. El logaritmo de un cociente es la resta de los logaritmos de los factores manteniendo la misma base.

6. En parejas, utilice cada uno un método de cálculo distinto para determinar los valores de los siguientes logaritmos. Una persona utilizará las propiedades anteriores de logaritmo y la otra seguirá el razonamiento de Napier. Luego, revisen su desarrollo y comparen sus resultados.

a. $\log_6(216:36)$

c. $\log_2(32:8)$

e. $\log_6(7776 : 216)$

b. $\log_4(256:4)$

d. $\log_3(729:27)$

f. $\log_8(262\,144 : 512)$

► ♦ ¿Facilitó el trabajo en parejas el desarrollo de la actividad anterior? ¿Por qué?

Figura 3.6 Propiedad del logaritmo de un producto y un cociente. Fuente: Díaz et al. 2020.

Propiedad 4

Sean a y b números reales positivos diferentes de 1 y x un número real positivo:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Dicho de otra forma, es posible realizar un cambio de base para expresar un logaritmo de una base cualquiera en otra base.

Figura 3.7 Propiedad del cambio de base de un logaritmo. Fuente: Díaz et al. 2020.

Posterior a cada demostración de la propiedad, el libro realiza una serie de ejercicios por cada tema, para de esta forma poner en práctica lo recientemente explicado.

En el texto del estudiante del 2022 el planteamiento de las aplicaciones de los logaritmos comienza con la explicación de cómo encontrar una incógnita “ x ” si esta se encuentra en el exponente de un número, dentro de una ecuación, tal como se muestra en la Figura 3.8.

Aplicaciones de los logaritmos

Si deseas determinar el valor de x en la ecuación: $3^x = 2$, ¿ocuparías una raíz enésima o un logaritmo? ¿Por qué?
¿Qué diferencia una escala logarítmica de una recta numérica? Justifica.

Objetivo: Modelar situaciones de la vida cotidiana y otras asignaturas mediante logaritmos.

En una expresión algebraica de la forma $a^b = c$ se pueden calcular cada una de sus cantidades si se conocen las otras dos. Esto se realiza mediante tres operaciones distintas:

- Si se desconoce c , se utilizan potencias para encontrar su valor. Ej: Si $a = 5$ y $b = 3$, entonces $c = 5^3 = 125$.
- Si se desconoce a , se utilizan raíces para encontrar su valor. Ej: Si $b = 4$ y $c = 81$, entonces $a^4 = 81 \rightarrow a = \sqrt[4]{81} = 3$.
- Si se desconoce b , se utilizan logaritmos para encontrar su valor. Ej: Si $a = 7$ y $c = 2401$, entonces $7^b = 2401 \rightarrow b = \log_7 2401 = 4$.

Figura 3.8 Ejemplos de aplicación de un logaritmo. Fuente: Díaz et al. 2020

Dentro de las aplicaciones se encuentran modelos de funciones logarítmicas relacionados al sonido, trabajando con una escala de intensidad, así también como la relación de los logaritmos con la química, con una escala de pH, tal como se muestra en las figuras 3.9 y 3.10 respectivamente.

SONIDO

1. La intensidad del sonido puede ser medida de dos formas distintas:

- **Intensidad sonora (β):** se mide en decibeles (dB).
- **Intensidad acústica (I):** corresponde a la cantidad de energía transportada por una onda sonora aplicada en una superficie. Se mide en watts sobre metro cuadrado ($\frac{W}{m^2}$).
Estas se relacionan mediante la expresión:

$$\beta = 10 \cdot \log(I) + 120$$

- a. El umbral del dolor es $1 \frac{W}{m^2}$ para el ser humano. ¿Cuál es la equivalencia en decibeles? ¿Qué situaciones de la imagen resultan doloras para el oído humano?
 - b. ¿Qué expresión algebraica se utiliza para calcular la intensidad acústica (I) dada la intensidad sonora (β)?
 - c. Utiliza la expresión anterior para determinar la intensidad acústica de 3 sonidos distintos.
 - d. ♦ Se sabe que la intensidad de un equipo duplica la de otro equipo. ¿Cuál es la diferencia que poseen en decibeles?
- ▶ ♦ ¿Por qué es importante no exponerse a sonidos de alta intensidad? Comenta.

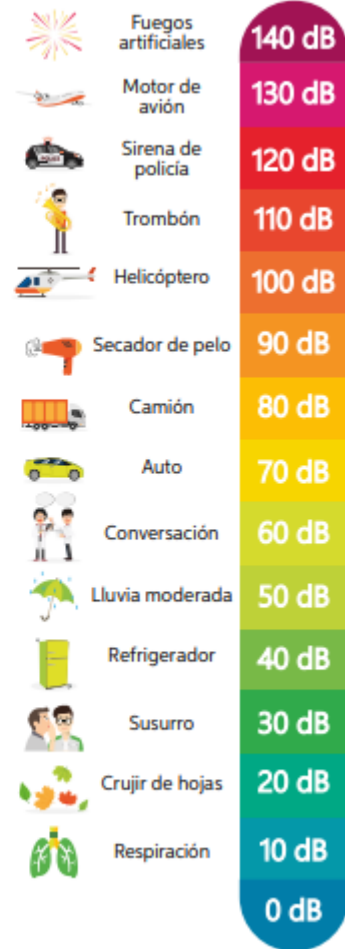
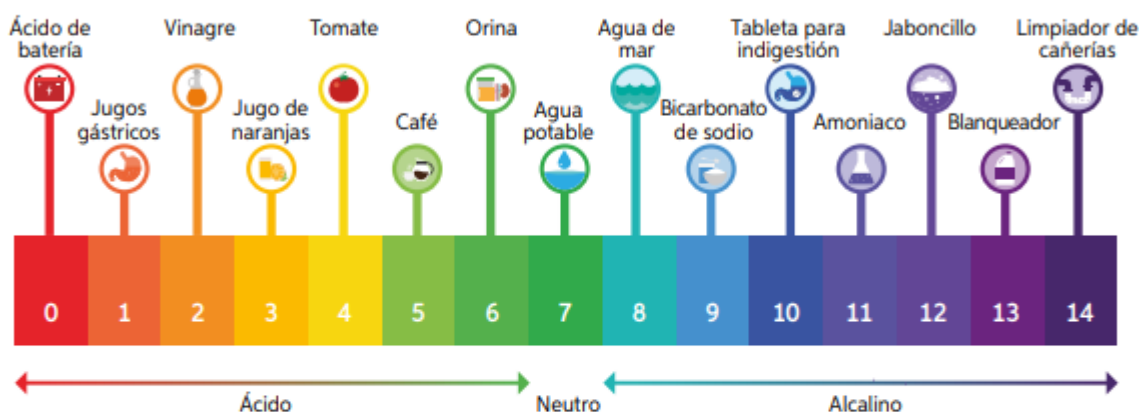


Figura 3.9 Actividad de aplicación de logaritmos mediante Intensidad Sonora. Fuente Díaz et al. 2020

QUÍMICA

2. Para medir la acidez o alcalinidad de una sustancia se utiliza el *pH*. Este asocia la concentración de moles de hidrógeno [H^+] en la sustancia (en moles por litro) según la fórmula: $pH = -\log[H^+]$



- Calcula el pH de una sustancia cuya concentración de iones de hidrógeno es de 0,00000038 moles por litro.
- La escala de pH varía entre 0 y 14. ¿Cuáles son las concentraciones de moles de hidrógeno máximas y mínimas de la escala?
- Calcula la concentración de moles de hidrógeno aproximada de 3 sustancias distintas.
- ♦ ¿Qué expresión algebraica utilizaste para calcular las concentraciones anteriores?
¿Cómo se relaciona con la fórmula para calcular el pH?

Figura 3.10 Actividad de aplicación de logaritmos mediante escala de pH. Fuente Díaz et al. 2020

También se plantean otras actividades de aplicación relacionadas a áreas como la biología o astronomía, con una dinámica similar a la presentada en las actividades anteriores.

3.5 Formato de la secuencia didáctica

En este apartado se detallarán los elementos generales que contendrá la propuesta didáctica, así como la estructura de cada actividad didáctica que será parte de la secuencia.

3.5.1 Objetivo de aprendizaje

La secuencia didáctica se enmarcará dentro del objetivo de aprendizaje de segundo medio mostrado en la tabla 3.4.

Objetivo de aprendizaje	OA 02. Mostrar que comprenden las relaciones entre potencias, raíces enésimas y logaritmos: • Comparando representaciones de potencias de exponente racional con raíces enésimas en la recta numérica. • Convirtiendo raíces enésimas a potencias de exponente racional y viceversa. • Describiendo la relación entre potencias y logaritmos. • Resolviendo problemas rutinarios y no rutinarios que involucren potencias, logaritmos y raíces enésimas.
--------------------------------	---

Tabla 3.4 Objetivo de aprendizaje relacionado al contenido de logaritmo en segundo año de enseñanza media. Fuente: Mineduc 2016.

Como se puede observar, en el OA 02 se pretende lograr que los estudiantes comprendan la relación entre potencias, raíces enésimas y logaritmos. La secuencia didáctica solo abordará el concepto de logaritmos y sus propiedades.

3.5.2 Organización de actividades de la secuencia didáctica

Las actividades didácticas propuestas en esta investigación se resumen en la tabla 3.5, donde se explicita el objetivo y la clasificación correspondiente a si la actividad promueve la definición del concepto de logaritmo o las propiedades de éstos. Las actividades propuestas son las siguientes:

Orden didáctico	Objetivo de la actividad	Clasificación
1	Comprender el concepto de logaritmo a partir del contexto histórico de su creación.	Concepto de logaritmo.
2	Describir la propiedad de logaritmo del producto y del cociente.	Propiedades de logaritmos.
3	Reconocer propiedades de logaritmos a través de patrones.	Propiedades de logaritmos.

Tabla 3.5 Organización de las actividades didácticas propuestas. Fuente: Elaboración propia.

3.5.3 Estructura de la actividad didáctica

En el encabezado, se describirán tres aspectos previos, relevantes para el desarrollo de cada actividad. Estos son:

- Motivo de la actividad
- Consideraciones para el docente
- Conocimientos previos del estudiante

Las actividades didácticas que se construirán tendrán la estructura que se muestra en la tabla 3.6, la cual responde a la teoría de la instrucción planteada por Bruner y estudiada en el apartado 2.1 del marco teórico de esta tesis.

Objetivo de la actividad	Objetivo específico de la actividad didáctica.
---------------------------------	--

Contenido de la actividad	Se detallarán los contenidos que abordarán los estudiantes durante la actividad.
Tiempo	Tiempo cronológico en el que se espera que los estudiantes desarrollen la actividad.
Secuencia Didáctica	
Dirección	Posibles caminos que tomarán los estudiantes hasta llegar al objetivo de aprendizaje. Se detallarán en orden didáctico los sub objetivos de aprendizaje de la actividad de descubrimiento.
Activación	Inicio de la actividad, donde se buscará plantear la incertidumbre adecuada en el estudiante, para motivar la curiosidad por descubrir/aprender. Contendrá preguntas guías para que el docente realice a los estudiantes.
Mantenimiento	Desarrollo de la actividad. Se detallará durante el desarrollo de la actividad qué tipo de estrategias adoptará el docente para mantener la incertidumbre/curiosidad por parte de los estudiantes. Contendrá preguntas orientadoras para el docente y los estudiantes.
Modo de representación del conocimiento	En este apartado se explicará a cuál o cuáles modos de representación del conocimiento, respecto a la teoría de la instrucción de Bruner, corresponde la actividad didáctica: representación enactiva, representación icónica y representación simbólica.
Forma y frecuencia del refuerzo	En esta sección se describirá la forma y la frecuencia en que el docente realizará a la retroalimentación a sus estudiantes, en base a los sub objetivos logrados por estos.

Materiales a utilizar	Descripción de los materiales que se utilizarán durante la actividad, en caso de ser necesarios.
------------------------------	--

*Tabla 3.6 Estructura de la actividad didáctica de aprendizaje por descubrimiento.
Fuente: Elaboración propia.*

4. CAPÍTULO 4: RESULTADOS

4.1 Introducción al capítulo

En este capítulo se presentarán las actividades didácticas elaboradas para enseñar los conceptos relacionados a logaritmos mediante el aprendizaje por descubrimiento, basado en la teoría de instrucción de Bruner.

4.2 Actividad 1

Motivo de la actividad

Introducir a los estudiantes al concepto de logaritmo. La forma de abordar el contenido es a partir del origen histórico del concepto, tal como se abordó en el marco teórico de esta investigación.

Consideraciones para el docente

La motivación entregada por el profesor es fundamental, ya que si esta etapa de la actividad falla será difícil que los estudiantes puedan desarrollar la siguiente etapa, debido a lo tedioso que puede resultar para ellos recurrir a operaciones de multiplicación y división con tantas cifras, las cuales son abordadas varios niveles atrás.

El monitoreo constante sobre los diferentes grupos de trabajo será fundamental, para lograr orientar correctamente a los grupos con las preguntas mencionadas en la actividad planteada. Es importante que las preguntas orientadoras vayan en los momentos indicados, en el caso de que los estudiantes lo requieran, y que constantemente se les proponga analizar qué información está entregando la tabla y motivarlos a descubrir cómo manipularlas.

Conocimientos previos del estudiante

- Potencias con exponente entero

Descripción general	
Objetivo de la actividad	Comprender el concepto de logaritmo a partir del contexto histórico de su creación.
Contenido de la actividad	- Multiplicaciones y divisiones de números enteros. - Expresión de números enteros como potencias de base y exponente entero. - Tablas de logaritmos. - Logaritmo.
Tiempo	45 minutos
Secuencia didáctica	
Dirección	Los sub objetivos de la actividad son: • Resolver operaciones de multiplicación y división en los números enteros. • Expresar números enteros como potencias de base y exponente entero. • Recordar las propiedades de las potencias de multiplicación y división con la misma base. • Realizar conjeturas sobre el uso de tablas de potencias para realizar multiplicaciones y divisiones de números extensos.
Activación	El docente planteará a los estudiantes la siguiente situación (10 minutos): “Es indudable que hoy en día la tecnología nos facilita bastante nuestro diario vivir. Por ejemplo, respecto al transporte ¿Se imaginan cómo sería trasladarse al colegio si no existieran los automóviles y buses? O en otras áreas de nuestras vidas por ejemplo ¿Cómo harían los trabajos de investigación del colegio si no existiera la internet y los computadores? Siguiendo con estos ejemplos ¿Qué estrategia utilizarían para comunicarse con sus familias y amigos si no tuviéramos los celulares? Algo parecido ocurrió con la aplicación de la matemática en el pasado. Antes no existían calculadoras para realizar cálculos complejos como los que realizamos hoy en día. Por ejemplo, el astrónomo Johannes Kepler, quien descubrió que los planetas no orbitan en órbitas circulares en torno al sol, sino que, en órbitas elípticas, tardó 22 años en poder realizar todos los cálculos matemáticos para desarrollar sus leyes. Imaginen que en los cálculos de Kepler estaba considerada la distancia de la tierra al sol, que es de nada

	más y nada menos que ¡147.597.870.700 metros! ¿Se imaginan si ustedes tuviesen que multiplicar o dividir números de ese tamaño a diario? A raíz de estas necesidades, es como matemáticos de épocas antiguas desarrollaron métodos para poder trabajar de forma más rápida y simple con estos números. En esta clase vamos a descubrir y comprender cómo estos matemáticos se las arreglaron para realizar cálculos con cifras tan grandes, a partir del concepto de logaritmo ¿Podrán descubrir los fundamentos de esta valiosa herramienta matemática?
Mantenimiento	<u>Actividad 1:</u> El profesor, solicitará a sus estudiantes que se reúnan en duplas o tríos y que, de forma manual, resuelvan las siguientes operaciones (15 minutos): a) $1048576 \cdot 1024 =$ b) $131072 \cdot 4096 =$ c) $576870912 \cdot 16777216 =$ <u>Actividad 2:</u> Luego de revisar que los cálculos realizados por todos los grupos sean los correctos, el profesor invitará a los estudiantes a analizar la tabla de potencias de base 2 y exponente entero, con n desde 1 hasta 40 (ver Anexo), para resolver los ejercicios propuestos. Acompañará la motivación por desarrollar los ejercicios con la lectura del siguiente párrafo: “Ante la dificultad de realizar cálculos con números grandes como por ejemplo los que acaban de realizar, matemáticos como John Napier (1550-1617) y Jost Bürgi (1552-1632) confeccionaron este tipo de tablas y otras más complejas, para poder ahorrar tiempo al momento de calcular. A continuación, realizaremos las mismas multiplicaciones y divisiones anteriores, pero no de la forma en que lo acaban de hacer, sino que como lo plantearon estos matemáticos”. El profesor comentará a las y los estudiantes que las tablas de potencias como la mostrada en la guía eran utilizadas en la antigüedad para realizar operaciones matemáticas de grandes cifras en poco tiempo. Se les invitará a analizarlas y a descubrir la forma de utilizarlas y resolver las siguientes operaciones. a) $262144 \cdot 65536 =$ b) $1048576 \cdot 524288 =$ c) $68719476736 \cdot 1073741824 =$ Luego de revisar los resultados mediante un plenario, se dará por concluida la actividad y el docente explicará de manera formal el concepto de logaritmo, a partir de los ejercicios resueltos por los estudiantes, y apoyándose de sus conjeturas.

Modo de representación del conocimiento	Esta actividad tiene principalmente el modo de representación simbólica, ya que se invita constantemente al estudiante a plasmar su idea sobre el papel mediante simbología matemática. Cuando se pide al estudiante realizar conjeturas respecto al uso de la tabla de potencias, se espera que el estudiante cree una abstracción mental de la posible solución a la pregunta inicial de la clase, por lo que podría considerarse que transitaría al modo de representación icónico, la cual no necesariamente será igual para todos los estudiantes.
Forma y frecuencia del refuerzo	<u>Activación</u> Durante la etapa de activación, el docente debería dar la palabra a algunos estudiantes cuando plantee las preguntas cómo “¿Se imaginan cómo sería trasladarse al colegio si no existieran los automóviles y buses?” o “¿Cómo harían los trabajos de investigación del colegio si no existiera la internet y los computadores?” entre otras planteadas, con la finalidad de generar motivación en el grupo de estudiantes y que se vaya pavimentando el camino para generar la incertidumbre adecuada en los estudiantes, respecto a cómo los matemáticos de la antigüedad desarrollaron métodos para calcular números de cifras elevadas. <u>Mantenimiento</u> <u>Actividad 1:</u> Durante la primera actividad, el docente deberá retroalimentar oportunamente a los estudiantes en caso de que se equivoquen en la operatoria para resolver los problemas planteados a) $1048576 \cdot 1024 =$ b) $131072 \cdot 4096 =$ c) $576870912 \cdot 16777216 =$ Será importante que el docente no resuelva esta actividad por los estudiantes, sino que solamente oriente en recordar el procedimiento para resolver este tipo de ejercicios, contenido que ya deberían dominar de acuerdo a la progresión de objetivos de aprendizaje. Una vez finalizado el tiempo asignado para la actividad, revisará en conjunto con todo el curso los resultados en la pizarra, pidiendo a los estudiantes que participen en la resolución de éstos. El docente puede incentivar la reflexión de los estudiantes preguntándoles “¿Qué tan práctico creen que sea resolver operatorias de esta forma y con números aún más grandes sin la ayuda de una calculadora?” <u>Actividad 2:</u> Esta sub actividad será el eje principal del descubrimiento por parte de los estudiantes, por lo que tendrá una gran demanda cognitiva por parte de ellos. Será importante que el docente monitoree activamente a cada grupo de trabajo y los oriente con preguntas como: a) ¿Qué información entrega la tabla mostrada? Explíquenlo con sus propias palabras.

	b) ¿Qué utilidad crees que tiene esta tabla para trabajar con números de grandes cifras? c) Utilizando la tabla, ¿Cómo podrías reescribir un número, como por ejemplo 274.877.906.944, utilizando otra notación? d) ¿Cómo escribir un número como una potencia de base entera? e) ¿Qué propiedades de las potencias recuerdan? f) ¿Qué relación observan entre los exponentes de cada factor y el exponente del respectivo producto? g) ¿Qué relación observan entre los exponentes del divisor y dividendo y el del cociente? Si bien en el aprendizaje por descubrimiento es importante fomentar que los estudiantes encuentren las respuestas por su propia cuenta, en caso de que algunos grupos estén demasiado complicados logrando resolver la segunda actividad, el docente puede desarrollar junto a ellos el siguiente ejemplo Ejemplo 1: $32 \cdot 16 = 512 \rightarrow 2^5 \cdot 2^4 = 2^9$
Materiales a utilizar	-Guía impresa (ver en Anexo). -Plumones. -Pizarrón.

*Tabla 4.1 Propuesta de actividad didáctica para introducir el concepto de logaritmo.
Fuente: elaboración propia.*

4.3 Actividad 2

Motivo de la actividad

La tabla 4.2 expone una actividad similar a la descrita anteriormente, partiendo desde el origen histórico del concepto de logaritmo y trabajando con los estudiantes a partir de la interpretación de tablas de potencias de base tres. La finalidad de esta actividad es que los estudiantes puedan descubrir las propiedades de la multiplicación y división de logaritmos, a partir de la transformación de sumas y restas de números enteros al registro de logaritmos, con ayuda de la tabla.

Lo que se espera con la actividad es que, mediante la transformación de las sumas y restas al registro de logaritmo, los estudiantes puedan descubrir un patrón en los

argumentos de estos, en los cuales tendrían que identificar que cuando hay sumas de logaritmos de igual base, el resultado de estos es un logaritmo de igual base pero cuyo argumento resulta ser la multiplicación de estos, mientras que en la resta sería su cociente.

Consideraciones para el docente

Para el desarrollo correcto de esta actividad, será fundamental las habilidades de pensamiento inductivo que tengan los estudiantes, lo que podría presuponer un riesgo para el desarrollo de la actividad en el caso de que los estudiantes no estén familiarizados con este tipo de planteamientos, aspecto que se discutirá en las conclusiones de este trabajo.

Conocimientos previos del estudiante

- Potencias de exponente entero

Descripción general	
Objetivo de la actividad	Describir la propiedad de logaritmo del producto y del cociente.
Contenido de la actividad	- Logaritmos. - Tabla de logaritmos. - Potencias de base y exponente entero.
Tiempo	45 minutos
Secuencia didáctica	

Dirección	Los sub objetivos de la actividad son: • Transformar números enteros a logaritmos de base 3. • Expresar números enteros como potencias de base y exponente entero. • Relacionar los logaritmos con las potencias.																		
Activación	El docente planteará a los estudiantes la siguiente situación (5 minutos): “Durante las clases anteriores hemos aprendido que los logaritmos revolucionaron las matemáticas cuando aún no existían calculadoras, como una herramienta de cálculo que permitió simplificar operaciones largas con números grandes y que ocupaban mucho tiempo. También comprendieron que los logaritmos están asociados a nuestra naturaleza, especialmente con nuestros sentidos, por lo que el estudio de este concepto resulta realmente interesante. En esta clase quiero que aprendan algunas propiedades que tienen los logaritmos, las cuales abren muchas más posibilidades de cálculo como las que ya hemos practicado. Al estar los logaritmos profundamente relacionados con las potencias, desde su invención, estos también siguen ciertas propiedades en determinadas operaciones al igual que como lo abordamos con las potencias. En esta clase, a partir de sus excelentes habilidades para analizar, descubrirán algunas propiedades de los logaritmos y serán capaces de describir sus reglas.”																		
Mantenimiento	<u>Actividad 1</u> Organizados en duplas, reescriban los términos de las siguientes sumas como logaritmos en base 3, ayudándose de la tabla de potencias. Luego, observen la tabla completada y expliquen, con sus propias palabras, la propiedad del logaritmo que se encontraría en este caso. (20 minutos) <table data-bbox="534 1283 1344 1843"> <tr> <th>Suma con números enteros</th><th>Suma expresada en logaritmos</th></tr> <tr> <td>$1 + 1 = 2$</td><td></td></tr> <tr> <td>$2 + 1 = 3$</td><td></td></tr> <tr> <td>$3 + 2 = 5$</td><td></td></tr> <tr> <td>$2 + 4 = 6$</td><td></td></tr> <tr> <td>$4 + 3 = 7$</td><td></td></tr> <tr> <td>$5 + 4 = 9$</td><td></td></tr> <tr> <td>$10 + 7 = 2$</td><td></td></tr> <tr> <td>$13 + 12 = 25$</td><td></td></tr> </table>	Suma con números enteros	Suma expresada en logaritmos	$1 + 1 = 2$		$2 + 1 = 3$		$3 + 2 = 5$		$2 + 4 = 6$		$4 + 3 = 7$		$5 + 4 = 9$		$10 + 7 = 2$		$13 + 12 = 25$	
Suma con números enteros	Suma expresada en logaritmos																		
$1 + 1 = 2$																			
$2 + 1 = 3$																			
$3 + 2 = 5$																			
$2 + 4 = 6$																			
$4 + 3 = 7$																			
$5 + 4 = 9$																			
$10 + 7 = 2$																			
$13 + 12 = 25$																			

	<u>Actividad 2</u> Organizados en duplas, reescriban los términos de las siguientes restas como logaritmos, ayudándose de la tabla de potencias. Luego, observen la tabla completada y expliquen, con sus propias palabras, la propiedad del logaritmo que se encontraría en este caso. (20 minutos) <table border="1"> <thead> <tr> <th>Resta con números enteros</th><th>Resta expresada en logaritmos</th></tr> </thead> <tbody> <tr> <td>$2 - 1 = 1$</td><td></td></tr> <tr> <td>$3 - 2 = 1$</td><td></td></tr> <tr> <td>$4 - 2 = 2$</td><td></td></tr> <tr> <td>$5 - 2 = 3$</td><td></td></tr> <tr> <td>$8 - 3 = 5$</td><td></td></tr> <tr> <td>$10 - 8 = 2$</td><td></td></tr> <tr> <td>$15 - 10 = 5$</td><td></td></tr> <tr> <td>$13 - 12 = 1$</td><td></td></tr> </tbody> </table>	Resta con números enteros	Resta expresada en logaritmos	$2 - 1 = 1$		$3 - 2 = 1$		$4 - 2 = 2$		$5 - 2 = 3$		$8 - 3 = 5$		$10 - 8 = 2$		$15 - 10 = 5$		$13 - 12 = 1$	
Resta con números enteros	Resta expresada en logaritmos																		
$2 - 1 = 1$																			
$3 - 2 = 1$																			
$4 - 2 = 2$																			
$5 - 2 = 3$																			
$8 - 3 = 5$																			
$10 - 8 = 2$																			
$15 - 10 = 5$																			
$13 - 12 = 1$																			
Modo de representación del conocimiento	Esta actividad asume que el estudiante ya tiene un buen trabajo del concepto de logaritmo respecto a la representación simbólica, por lo que no transita por la representación enactiva, solo entre la abstracción de la idea mental de lo que sería la propiedad del logaritmo (representación icónica) y su representación formal, lo simbólico.																		
Forma y frecuencia del refuerzo	<u>Activación</u> Durante esta etapa de la actividad el docente debe motivar a sus estudiantes al descubrimiento de las propiedades de los logaritmos, por ello es importante que les recuerde el proceso que tuvieron en clases para llegar al conocimiento de este, con el objetivo de que los estudiantes recuerden la importancia de la herramienta, desde un punto de vista histórico, con preguntas como “¿Cómo podrían explicar el concepto de logaritmo en sus propias palabras?” “¿Creen que el logaritmo fue útil en la antigüedad, antes de inventar las calculadoras, para facilitar los cálculos de multiplicaciones y divisiones con números muy grandes?” “¿Cómo se las hubiesen arreglado ustedes en esa época?”. <u>Mantenimiento</u> <u>Actividad 1:</u>																		

	Durante esta actividad será trascendental que el docente monitoree intensivamente el desarrollo de la actividad de sus estudiantes, orientándolos con preguntas como: a) ¿Qué información es la que entrega la tabla? b) ¿Cómo se relaciona la información entregada en la tabla con el concepto de logaritmo? Además, para que los estudiantes no se frustren durante la realización de la actividad, deberá fomentar a que los estudiantes completen la tabla completa que se les pide antes de establecer conclusiones respecto a la propiedad que podrían estar observando. Al final de la Actividad 1, el profesor revisará las conjeturas de diferentes estudiantes en modo de plenario, hasta que en conjunto se construya la definición de la propiedad del logaritmo de un producto. <u>Actividad 2:</u> Durante esta actividad el docente realizará el mismo apoyo con la tarea anterior, pero ahora fomentará la curiosidad de los estudiantes con preguntas como: a) ¿Qué ven en común con la actividad anterior? b) ¿Qué ven de diferente ahora respecto a lo trabajado en la actividad 1?
Materiales a utilizar	-Guía impresa (ver en Anexo). -Plumones. -Pizarrón.

Tabla 4.2 Propuesta de actividad didáctica para las propiedades de multiplicación y división de logaritmo. Fuente: elaboración propia.

4.4 Actividad 3

Motivo de la actividad

Identificar patrones en ejercicios de logaritmo de la unidad y la base. La actividad considera las dos actividades anteriores como apoyo, ya que los estudiantes deben saber determinar el valor logaritmo a través de la base y el argumento.

Consideraciones para el docente

Es importante que el docente recuerde a sus estudiantes los pasos que han seguido para comprender el concepto de logaritmo y algunas de sus propiedades, reforzando

positivamente el esfuerzo realizado hasta el momento. También resulta necesario que los invite a recordar las actividades anteriores, así como también el contexto histórico de los logaritmos.

Conocimientos previos del estudiante

- Potencias con exponente entero.
- Resolver logaritmos mediante la definición

Descripción general	
Objetivo de la actividad	Reconocer propiedades de logaritmos a través de patrones.
Contenido de la actividad	- Potencias de base y exponente entero. - Relación entre potencia y logaritmo. - Logaritmo.
Tiempo	30 minutos
Secuencia didáctica	
Dirección	Los sub objetivos de la actividad son: • Calcular potencias de base y exponente entero. • Relacionar potencias y logaritmos. • Realizar conjeturas a partir de una tabla. • Explicar las propiedades del logaritmo de la unidad y de la base.

Activación	El docente se dirigirá a los estudiantes comentando lo siguiente: “En las clases anteriores ya han comprendido el concepto de logaritmo a partir de su relación con las tablas de potencias, siguiendo el curso histórico que tuvo este concepto en sus orígenes, como cuando John Napier buscó una forma de simplificar los cálculos en el área de astronomía, desarrollando el concepto de logaritmo. También, han descubierto algunas propiedades de los logaritmos, las que simplifican aún más los cálculos, como lo son la propiedad de multiplicación y división del argumento de los logaritmos. El día de hoy quiero que sigamos esta línea de descubrimientos, para que sean ustedes los protagonistas de este proceso que han hecho tan bien.”																																								
Mantenimiento	Previo al inicio del trabajo, el docente organizará a los estudiantes en duplas. El docente presentará a sus estudiantes la siguiente actividad, la cual se les entregará impresa en una guía (ver Anexo). <u>Actividad 1:</u> El profesor o profesora, presentará a sus estudiantes la siguiente tabla de potencias, donde le pedirá a sus estudiantes que la completen con la información que se les solicita. Además, les pedirá que analicen la tabla completa y que generalicen algunos patrones que puedan observar y justifiquen si estos podrían considerarse como propiedades de los logaritmos o no, contestando la pregunta que aparece en la guía. <table><tr><td>Potencia</td><td>Base</td><td>Exponente</td><td>Logaritmo</td></tr><tr><td>$6^2 = 36$</td><td>6</td><td>2</td><td>$\log_6(36) = 2$</td></tr><tr><td>$2^0 =$</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>$2^1 =$</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>$3^0 =$</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>$3^1 =$</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>$4^0 =$</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>$4^1 =$</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>$5^0 =$</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>$5^1 =$</td><td></td><td></td><td></td></tr></table>	Potencia	Base	Exponente	Logaritmo	$6^2 = 36$	6	2	$\log_6(36) = 2$	$2^0 =$				$2^1 =$				$3^0 =$				$3^1 =$				$4^0 =$				$4^1 =$				$5^0 =$				$5^1 =$			
Potencia	Base	Exponente	Logaritmo																																						
$6^2 = 36$	6	2	$\log_6(36) = 2$																																						
$2^0 =$																																									
$2^1 =$																																									
$3^0 =$																																									
$3^1 =$																																									
$4^0 =$																																									
$4^1 =$																																									
$5^0 =$																																									
$5^1 =$																																									
Modo de representación del conocimiento	Esta actividad transita entre la representación icónica y simbólica, ya que, si bien el estudiante comienza la actividad trabajando de manera simbólica, al analizarla y realizar conjeturas crea una abstracción mental de la posible propiedad del logaritmo, la que a partir del ordenamiento de sus ideas plasmará sobre el papel, volviendo a la representación simbólica.																																								

Forma y frecuencia del refuerzo	<u>Activación:</u> Es importante que el docente recuerde a sus estudiantes los pasos que han seguido para comprender el concepto de logaritmo y algunas de sus propiedades, reforzando positivamente el esfuerzo realizado hasta el momento. También resulta necesario que los invite a recordar las actividades anteriores, así como también el contexto histórico de los logaritmos, con preguntas como: a) ¿Qué hicimos las clases anteriores? b) ¿Qué es un logaritmo? ¿Podrían mencionar un ejemplo? b) ¿Recuerdan cómo aprendieron el concepto de logaritmo y sus propiedades? c) ¿Cómo se originaron los logaritmos? ¿Qué finalidad tenían? <u>Mantenimiento:</u> <u>Actividad 1:</u> Siguiendo la misma dinámica de las actividades anteriores, el monitoreo intensivo por parte del docente será clave en promover el descubrimiento, ya que con las preguntas adecuadas en el estado de avance correspondiente de cada dupla permitirá que todos los estudiantes consigan el objetivo de la actividad. Ante esto, se recomiendan las siguientes preguntas a los estudiantes. En caso de no comprender cómo completar la tabla: a) ¿Qué información entrega la tabla y cuál se debe completar? b) ¿Cuál es la definición de una potencia? c) ¿Qué relación existe entre una potencia y un logaritmo? En caso de que los estudiantes hayan completado la tabla y tengan dificultades para conjeturar acerca de las propiedades de los logaritmos que se les invita a descubrir: d) ¿Pueden ver algo en común en las potencias o los logaritmos? e) ¿Cómo se relacionan los elementos en común que tienen las diferentes potencias con los logaritmos? En caso de que las y los estudiantes no sepan si puedan establecer las generalizaciones como propiedades: f) ¿Qué explicación le darías a esta propiedad? g) ¿Las conjeturas realizadas sirven para cualquier base de logaritmo? ¿Por qué? ¿Cómo lo podríamos comprobar?
---	---

Materiales a utilizar	-Guía impresa (ver en Anexo). -Plumones. -Pizarrón.
------------------------------	---

Tabla 4.3 Propuesta de actividad didáctica de propiedades de logaritmos, como identificación de patrones en logaritmo de la unidad y de la base. Fuente: elaboración propia.

5. CONCLUSIONES

5.1 Introducción al capítulo

En este capítulo se expondrán las conclusiones obtenidas a partir de la investigación realizada, abordando primero las conclusiones generales y luego las limitaciones y proyecciones de esta investigación.

5.2 Conclusiones generales

En cuanto a la historia de los logaritmos, estos nacieron en base a una necesidad, seguido a esto han sido perfeccionados hasta lo que conocemos hoy. Actualmente, son de mucha utilidad en el campo de las ciencias, además explican comportamientos en diferentes áreas, desde la astronomía hasta la psicología.

Respecto a las tres propuestas de actividades didácticas elaboradas, se puede concluir que, se benefician de la riqueza histórica de los logaritmos, de acuerdo con lo investigado en la epistemología de estos, lo que permite abordar el concepto de logaritmo desde un enfoque integral, promoviendo la motivación por parte de los estudiantes.

El aprendizaje por descubrimiento está orientado a la participación interactiva de los estudiantes, ya que a partir de estas relaciones es que se va construyendo el conocimiento. Por el motivo anterior, es que las tres actividades didácticas propuestas están orientadas al trabajo colaborativo, lo que enriquecería enormemente el proceso de aprendizaje por descubrimiento. Además, el reto de descubrir el concepto de logaritmo y sus propiedades, como en las actividades diseñadas, pareciera ser bastante demandante en términos cognitivos para un estudiante chileno, considerando que de acuerdo al informe PISA, este no ha desarrollado las habilidades cognitivas de nivel superior (Agencia de la Calidad de la Educación, 2018), por lo que el trabajo con sus pares facilitaría este proceso, además de promover el desarrollo de habilidades sociales en ellos.

El currículo nacional actual propone en uno de sus objetivos generales de desarrollo en el ámbito del conocimiento y la cultura “Desarrollar la curiosidad, la iniciativa personal y la creatividad”. Este objetivo se ve alejado del cómo se plantean los objetivos de aprendizaje que involucran a los logaritmos.

Respecto al OA02 de matemática, los logaritmos son una herramienta que se relaciona con potencias y raíces, siendo esto una oportunidad para aprovechar su riqueza histórica en el proceso de enseñanza, con el fin de promover un significado para los estudiantes. Además de este propósito que se entrega, lo trascendental de la enseñanza por el método de aprendizaje por descubrimiento radica en el desarrollo de habilidades matemáticas como el pensamiento crítico y el reconocimiento de patrones a través del pensamiento inductivo.

El texto de estudio de matemática de segundo año medio, al abordar el concepto de logaritmo, también incorpora algunas características del aprendizaje por descubrimiento, como por ejemplo la actividad que se puede observar en la Figura 3.1 del marco metodológico, la cual introduce el concepto de logaritmo, así como también la actividad mostrada en la Figura 3.3, la cual invita a los estudiantes a comprobar las propiedades de los logaritmos presentadas, lo que conllevaría a un proceso de contrastación de hipótesis por parte de ellos. Estas actividades sirven como base para diseñar actividades de aprendizaje por descubrimiento, realizando modificaciones que permitan generar la incertidumbre adecuada en los estudiantes y mantener la curiosidad hasta el descubrimiento de los conceptos, con la finalidad de promover habilidades de pensamiento matemático en ellos.

De acuerdo a la metodología de aprendizaje por descubrimiento, basada en la teoría de la instrucción de Bruner, la fase de activación resulta parte fundamental en el proceso de aprendizaje, ya que en esta etapa se genera el interés o incertidumbre necesaria por parte de los estudiantes respecto al tópico tratado, lo que promoverá el proceso de aprendizaje. Resulta fundamental elaborar activaciones que presenten un significado para los estudiantes, como por ejemplo el contexto histórico en el que se propuso el concepto de logaritmo, estudiado en el marco metodológico de esta investigación.

Durante la fase de mantenimiento, es necesario ser cuidadosos con la cantidad y el tipo de información que se entregará a los estudiantes, ya que podría atender negativamente al proceso de exploración, por lo que la planificación de las preguntas orientadoras y la comprensión del contexto en el cual se está enseñando resultan fundamentales para el correcto desarrollo de las actividades.

5.3 Limitaciones de la investigación

Dado que la investigación es de carácter práctica, no se comprobó de forma empírica las actividades propuestas en un grupo de estudiantes.

El estudio se enfoca en el diseño de actividades didácticas en el concepto específico de logaritmos, cubriendo parcialmente el OA 02 de segundo año medio, el cual también plantea poder establecer relaciones entre potencias y raíces.

Respecto al OA 02 de segundo año medio, en el tópico de logaritmos, no se diseñaron actividades didácticas orientadas a la aplicación ni resolución de problemas

5.4 Proyecciones de la investigación

El estudio realizado, puede considerarse como base para plantear una serie de medidas que contribuyan a la enseñanza de los logaritmos en las aulas chilenas. Una de ellas es llevar a la práctica las actividades diseñadas para fortalecer cada una de las propuestas planteadas. Por otro lado, se sugiere desarrollar propuestas basadas en aprendizaje por descubrimiento orientadas a la aplicación del concepto de logaritmo y a la resolución de problemas.

En base a la investigación realizada, sería interesante extender la metodología de aprendizaje por descubrimiento a otros objetivos de aprendizaje, en diferentes niveles, que involucren al concepto de logaritmo lo que podría llevar a revisar los programas actuales de estudio y determinar si es necesario replantearlos, o en su defecto, adaptarlos.

6. REFERENCIAS

- Agencia de Calidad de la Educación. (2018). PISA 2018. Entrega de resultados competencia Lectora, Matemática y Científica en estudiantes de 15 años en Chile. http://archivos.agenciaeducacion.cl/PISA_2018-Entrega_de_Resultados_Chile.pdf
- Arancibia V., Herrera P., Strasser K. (1997). Manual de Psicología Educacional (6ta ed.). Ediciones Universidad Católica.
- Ausubel, D. P., Novak J. D. y Hanesian, H. (1983) "Psicología educativa. Un punto de vista cognoscitivo".
- Barrón, A. (1993). Aprendizaje por descubrimiento: Principios y aplicaciones inadecuadas. Enseñanza de las Ciencias Revista de investigación y experiencias didácticas, 11(1), 3-11.
- Bruner, J. (1961). The act of discovery. Harvard Educational Review, 4, 21-32.
- Bruner, J. (1966). Towards a Theory of Instruction. Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts.
- Caballero, M. (2010). Concepciones y enseñanza del concepto ecuación lineal un estudio con profesores de bachillerato. Tesis de licenciatura no publicada. Mérida, Yucatán, México.
- Camarero D., García A. (2014). Nombrando las estrellas. Revista de Ciencias, 4 (1), 48-56.

- Cancino, R. (2010). El Modelo Neoliberal y la Educación Universitaria en Latinoamérica. El caso de la universidad chilena. *Sociedad y discurso*, AAU, (18), 152-167.
- Cervera, J. A. (2004). John Napier (1550-1617) y su libro de Rabdología. In *Historia de las ciencias y de las técnicas* (pp. 347-356). Universidad de La Rioja.
- Coria, J. (2018). Aprendizaje por descubrimiento en matemáticas: Tres secuencias didácticas para 1° de secundaria. Tesis de Maestría, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.
- Díaz, T. (1997). Enfoques del trabajo didáctico institucional para la elaboración de los proyectos educativos: el caso cubano. Pinar del Río: Cuba; Universidad de Pinar del Río. Centro de Estudios de Didáctica de la Educación Superior.
- Díaz V., Ortiz S., Morales V., Rebolledo H., Barrera Y., Norambuena M. (2020). Texto del estudiante de matemático 2° medio. SM.
- D' Amore B. (2006). *Didáctica de la Matemática* (1° edición). Cooperativa Editorial Magisterio.
- Estévez, F. (2017) *Secretos de Estado: Historia desclasificada de la dictadura chilena 1970-1990: Museo de la Memoria y los Derechos Humanos*. Santiago.
- Ferrari, M., & Farfán, R. (2007). Una red de modelos y la construcción de los logaritmos. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 20, 496-501.
- Ferrari, M. (2008). Un estudio socioepistemológico de la función logarítmica. De facilitar cálculo a una primitiva. Tesis doctoral no publicada, Cinvestav-IPN, México.

Fontes S., Fontes A.I. (1994). Consideraciones teóricas sobre las leyes psicofísicas. Revista de Psicología General y Aplicada, 47(4), 391-395.

Fuster, G. G., & Martín, M. D. R. G. (2012). Cuatro problemas de método científico-experimental que reclaman la apertura a la inteligencia meta-metódica. In Inteligencia y filosofía (pp. 661-680). Marova.

Gamboa, S. (2021). Logaritmos, la matemática de la percepción. Centro de Investigaciones Químicas, Universidad Autónoma del Estado de Morelos.
<https://launion.com.mx/blogs/ciencia/noticias/189577-logaritmos-las-matematicas-de-la-percepcion.html>

Gómez, B. (2003). ¿Qué aporta la Didáctica de la Matemática a la formación inicial de los matemáticos?. Acta Latinoamericana De Matemática Educativa, 16(2), 378-384.

Gómez, G. (2012). Sugerencias para el análisis epistemológico de un texto. Universidad de Granada. España

González, A. M., & Hernández Alegría, A. (2014). Positivismo, dialéctica materialista y fenomenología: tres enfoques filosóficos del método científico y la investigación educativa. Actualidades investigativas en educación, 14(3), 502-523.

Grundy S. (1998). Producto o praxis del curriculum (3º edición). Morata.

Higuera de Frutos, S. (2016). Reglas de cálculo. Pensamiento Matemático, 6(2), 149-163.

Impellizere de Córdoba, S. B. (2003). La invención de los logaritmos. Revista de Educación Matemática, 18(1), 13-25.

- Kieran, C. (1998). Complexity and Insight. *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 29, 5, pp 595-601.
- Larrañaga, O. (1995). Descentralización de la educación chilena: Una evaluación económica. *Estudios Públicos*, (60).
- Madero, C. (2021). El neoliberalismo educacional chileno y sus posibilidades de derrumbe en una nueva constitución: ¿Es posible?. *Encuentros en Teoría e Historia de la Educación*, 22, 137-152.
- Martínez, Ò. F., Sales, M. C. D., & Gumbau, M. F. (2013). La construcción de los logaritmos.: Historia y proyecto didáctico (Vol. 39). Publicacions de la Universitat Jaume I.
- MINEDUC. (2015). Bases Curriculares 7° básico a 2° medio. https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-37136_bases.pdf
- Mora, C. (2002). Estrategias para el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. *Revista de pedagogía*, 24(70), 181-272.
- Moreno, F. J. T. (2003). Historia de los logaritmos. *Apuntes de Historia das Matemáticas*, 2(2).
- Mujica-Johnson, F. (2020). Análisis crítico del currículo escolar en Chile en función de la justicia social. *Revista Electrónica Educare*, 24(1), 472-485.
- Núñez, M. R. (2020). El Impacto del Modelo Neoliberal en la Educación Chilena. *Pro Veritatem*, 6(6), 47-59.

- Pascual, E. (1998). Racionalidades en la producción curricular y el proyecto curricular. *Pensamiento Educativo, Revista de Investigación Latinoamericana (PEL)*, 23(2), 13-72.
- Piaget, J. (1970). *La construcción de lo real en el niño* (3ª edición). Proteo.
- Piaget, J. (1981). *La teoría de Piaget Infancia y aprendizaje*, 2, 13-54.
- Puigross, A. (1996). Educación neoliberal y quiebre educativo. *Nueva Sociedad* Nro. 146 Noviembre-Diciembre 1996, pp. 90-101. Buenos Aires, Argentina.
- Sanabria M., Costa V. (2016). Una propuesta didáctica para el estudio del concepto logaritmo en el marco de la teoría antropológica de lo didáctico. 2do Congreso internacional de enseñanza de las ciencias y la matemática (2 CIECYM). Buenos Aires, Argentina.
- Sanabria, M. D., & Costa, V. A. (2016). Una propuesta didáctica para el estudio del concepto logaritmo en el marco de la teoría antropológica de lo didáctico. In II Congreso Internacional de Enseñanza de las Ciencias y la Matemática-CIECyM y III Encuentro Nacional de Enseñanza de la Matemática-ENEM (UNICEN, 6 al 9 de septiembre de 2016).
- Sánchez, J. (1991). *Aprendizaje de las Matemáticas por descubrimiento* (Vol. 64). Ministerio de Educación.
- Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of function. En: E. Dubinsky y G. Harel (Eds.), *The concept of function. Aspects of epistemology and pedagogy* (pp. 25-58). EE. UU. Mathematical Association of America. Volumen 25.

Torres García, R. D. (2019). Secuencia didáctica para trabajar los logaritmos con estudiantes de grado décimo del colegio Ave María. Aplicación a la escala de pH. Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales.

Vargas, M. (2020). La importancia de la didáctica. La escuela también educa. <https://maravarzamoriveracruz.wordpress.com/2020/10/19/la-importancia-de-la-didactica/>

Vidal, R. (2009). LAS RAÍCES Y RADICALES EN LIBROS DE TEXTO EN CHILE (1969-2009) Un análisis de rupturas epistemológicas como aporte a la Didáctica de las Matemáticas. Tesis doctoral, Pontificia Universidad Católica de Chile. Repositorio ANID.

Valenzuela C., Dolores C. (2012). El currículum oficial e impartido: contenidos y objetivos. Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 79, 47-69.

OCDE, (2005). Informe PISA 2003. Aprender para el mundo del mañana. Santillana.

MINEDUC. (2016). Matemática. Programa de estudio Segundo medio. Primera edición. https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-34360_programa.pdf

Unidad de Currículum y Evaluación UCE. (s.f.). Currículum Nacional. Eje: Matemática. Ministerio de Educación de Chile. <https://www.curriculumnacional.cl/portal/Ejes/Matematica/>

Ampuero A., Rebolledo E. (2019). Un estudio desde el análisis didáctico sobre la enseñanza de los logaritmos, a nivel escolar. Tesis de pregrado no publicada. Universidad Católica de Valparaíso.

ANEXOS

Taxonomía de Bloom

Procesos cognitivos de orden inferior				Procesos cognitivos de orden superior			
RECORDAR		COMPRENDER		APLICAR		ANALIZAR	
Recordar hechos/datos sin necesidad de entender. Se muestra material aprendido previamente mediante el recuerdo de términos, conceptos básicos y respuestas.		Mostrar entendimiento a la hora de encontrar información del texto. Se demuestra comprensión básica de hechos e ideas.		Usar en una nueva situación. Resolver problemas mediante la aplicación de conocimiento, hechos o técnicas previamente adquiridas en una manera diferente.		Examinar en detalle. Examinar y descomponer la información en partes identificando los motivos o causas; realizar inferencias y encontrar evidencias que apoyen las generalizaciones.	
PALABRAS CLAVE: Elegir observar mostrar Copiar omitir deletrear Definir rastrear afirmar Decir cuándo duplicar Citar repetir qué Leer relacionar nombrar Quién listar repetir Recitar escribir localizar Cómo dónde Memorizar Por qué reconocer		PALABRAS CLAVE: Preguntar esquematizar Generalizar predecir Clasificar dar ejemplos Comparar relacionar Contrastar ilustrar Parafrasear demostrar Informar discutir Inferir revisar Interpretar mostrar Explicar resumir Traducir observar		PALABRAS CLAVE: Actuar emplear practicar Identificar seleccionar agrupar Calcular elegir resumir Entrevistar planear desarrollar Enseñar transferir interpretar Usar demostrar categorizar Conectar dramatizar construir Planear manipular resolver Simular seleccionar unir Hacer uso organizar		PALABRAS CLAVE: Examinar priorizar encontrar Centrarse agrupar asumir Razonar destacar causa-efecto Inferencia separar aislar Comparar distinguir reorganizar Dividir motivar diferenciar Buscar similitudes descomponer Inspeccionar Investigar Simplificar categorizar Preguntar ordenar Establecer poner a prueba Encuestar observar	
EVALUAR		CREAR					
Justificar. Presentar y defender opiniones realizando juicios sobre la información, la validez de ideas o la calidad de un trabajo basándose en una serie de criterios.		Cambiar o crear algo nuevo. Recopilar información de una manera diferente combinando sus elementos en un nuevo modelo o proponer soluciones alternativas.					
PALABRAS CLAVE: Medir opinar argumentar Evaluar premiar testar Decidir debatir convencer Apoyar explicar seleccionar Defender comparar deducir Justificar percibir recomendar Crítico probar estimar Juzgar influir persuadir Valorar demostrar		PALABRAS CLAVE: Adaptar estimar planear Añadir experimentar testar Construir extender sustituir Cambiar formular reescribir Combinar hipotetizar suponer Componer innovar teorizar Compilar mejorar pensar Componer maximizar simplificar Crear minimizar proponer Descubrir modelar visualizar Diseñar modificar Desarrollar originar Elaborar transformar					
ACCIONES		ACCIONES		ACCIONES		ACCIONES	
DESCRIBIR Definición ENCONTRAR Hechos IDENTIFICAR Etiquetado LISTAR Listado LOCALIZAR Cuestionario NOMBRAR Reproducción RECONOCER Test RECUPERAR Cuaderno Fotocopia		CLASIFICAR Colección COMPARAR Ejemplos COMPARAR Ejemplificar EXPLICAR Explicación INFERIR Etiquetado INTERPRETAR Listado PARAFRASEAR Esquema RESUMIR Cuestionario Resumen		DESEMPEÑAR Demostración EJECUTAR Diario IMPLEMENTAR Ilustraciones USAR Entrevista EMPLEAR Interpretación REALIZAR Simulación Presentación Dibujo		ATRIBUIR Reseña DECONSTRUIR Gráfica INTEGRAR Lista de control ORGANIZAR Base de datos ESQUEMATIZAR Gráfico ESTRUCTURAR Informe Encuesta Hoja de cálculo	
PREGUNTAS		PREGUNTAS		PREGUNTAS		PREGUNTAS	
¿Puedes enumerar...? ¿Puedes recordar...? ¿Puedes seleccionar...? ¿Cómo ocurrió...? ¿Cómo es...? ¿Cómo describirías...? ¿Podrías explicar...? ¿Qué es...? ¿Cuál fue...? ¿Quiénes fueron los principales...? ¿Por qué...?		¿Puedes explicar que está ocurriendo...? ¿Cómo clasificarías...? ¿Cómo compararías/contrastarías...? ¿Cómo podrías parafrasear el significado de...? ¿Cómo resumirías...? ¿Qué puedes decir sobre...? ¿Cuál es la mejor respuesta...? ¿Qué afirmaciones apoyan...? ¿Podrías afirmar o interpretar en tus propias palabras...?		¿Cómo usarías...? ¿Qué ejemplos sobre...puedes encontrar? ¿Cómo organizarías... para presentar...? ¿Cómo aplicarías lo que has aprendido para desarrollar...? ¿Qué enfoque usarías para...? ¿Qué aspectos seleccionarías para mostrar...? ¿Qué preguntas harías en una entrevista a...?		¿Cuáles son las partes o rasgos de...? ¿En qué aspectos está...? ¿Relacionado/a con...? ¿Por qué opinas que...? ¿Qué motivo hay para...? ¿Puedes hacer un listado de las partes...? ¿Qué ideas justifican...? ¿Qué conclusiones extraes de...? ¿Qué evidencias de... encuentras? ¿Puedes distinguir entre...? ¿Cuál es la relación entre...? ¿Cuál es la función de...?	
PREGUNTAS		PREGUNTAS		PREGUNTAS		PREGUNTAS	
¿Estás de acuerdo con...? ¿Cuál es tu opinión sobre...? ¿Cómo comprobarías...? ¿Sería mejor si...? ¿Por qué ese personaje...? ¿Cómo valorarías...? ¿Cómo determinarías...? ¿Cómo priorizarías...? ¿Qué información podrías para apoyar tu punto de vista? ¿Qué datos te llevaron a esa conclusión? ¿Qué seleccionarías para...? ¿Qué elección hubieras tomado si...?		¿Qué cambios harías para...? ¿Cómo mejorarías...? ¿Qué pasaría si...? ¿Podrías proponer una alternativa? ¿Puedes elaborar...basándote en...? ¿De qué forma evaluarías...? ¿Podrías formular una teoría alternativa? ¿Qué harías para maximizar/minimizar...? ¿Cómo pondrías a prueba...? ¿Podrías construir un modelo que cambie...? ¿Se te ocurre un modo original para...? ¿Cómo cambiarías el guión/plan? ¿Cómo adaptarías... para...?					

Fuente: Gobierno de Canarias. (s.f.). La taxonomía de Bloom, una herramienta imprescindible para enseñar y aprender.

<https://www3.gobiernodecanarias.org/medusa/edublog/cprofestenerifesur/2015/12/03/la-taxonomia-de-bloom-una-herramienta-imprescindible-para-ensenar-y-aprender/>

Guía para el estudiante. Actividad didáctica N°1

Nombres:		Curso:		Fecha:	
-----------------	--	---------------	--	---------------	--

Instrucciones:

- La forma de trabajar será en duplas o tríos.
- No se permite el uso de celular o calculadora durante el desarrollo de la guía.

Actividad 1:

De forma manual, resuelvan las siguientes operaciones (15 minutos):

a) $1048576 \cdot 1024 =$

b) $131072 \cdot 4096 =$

c) $576870912 \cdot 16777216 =$

Actividad 2:

Ante la dificultad de realizar cálculos con números grandes como por ejemplo los que acaban de realizar, matemáticos como John Napier (1550-1617) y Jost Bürgi (1552-1632) confeccionaron este tipo de tablas y otras más complejas, para poder ahorrar tiempo al momento de calcular. A continuación, realizaremos las mismas multiplicaciones y divisiones anteriores, pero no de la forma en que lo acaban de hacer, sino que como lo plantearon estos matemáticos.

Analicen la siguiente tabla de potencias en base 2 y luego resuelvan los ejercicios planteados A PARTIR DE LA TABLA, NO REALIZANDO LAS OPERACIONES CONVENCIONALES.

n	2^n	n	2^n
1	1	21	2.097.152
2	4	22	4.194.304
3	8	23	8.388.608
4	16	24	16.777.216
5	32	25	33.554.432
6	64	26	67.108.864
7	128	27	134.217.728
8	256	28	268.435.456
9	512	29	536.870.912
10	1.024	30	1.073.741.824
11	2.048	31	2.147.483.648
12	4.096	32	4.294.967.296
13	8.192	33	8.589.934.592
14	16.384	34	17.179.869.184
15	32.768	35	34.359.738.368
16	65.536	36	68.719.476.736
17	131.072	37	137.438.953.472
18	262.144	38	274.877.906.944
19	524.288	39	549.755.813.888
20	1.048.576	40	1.099.511.627.776

a) $262144 \cdot 65536 =$

b) $1048576 \cdot 524288 =$

c) $68719476736 \cdot 1073741824 =$

Guía para el estudiante. Actividad didáctica N°2

Nombres:		Curso:		Fecha:	
-----------------	--	---------------	--	---------------	--

Instrucciones:

- La forma de trabajar será en duplas o tríos.
- No se permite el uso de celular o calculadora durante el desarrollo de la guía.

Actividad 1:

Reescriban los términos de las siguientes sumas como logaritmos en base 3, ayudándose de la tabla de potencias (que está adjunta al final de la guía). Luego, observen la tabla completada y expliquen, con sus propias palabras, la propiedad del logaritmo que se encontraría en este caso. (20 minutos)

Suma con números enteros	Suma expresada en logaritmos
$1 + 1 = 2$	
$2 + 1 = 3$	
$3 + 2 = 5$	
$2 + 4 = 6$	
$4 + 3 = 7$	
$5 + 4 = 9$	
$10 + 7 = 2$	
$13 + 12 = 25$	

a) ¿Qué propiedad podemos encontrar para este caso? Explíquenlo con sus propias palabras

Reescriban los términos de las siguientes restas como logaritmos, ayudándose de la tabla de potencias. Luego, observen la tabla completada y expliquen, con sus propias palabras, la propiedad del logaritmo que se encontraría en este caso.

Resta con números enteros	Resta expresada en logaritmos
$2 - 1 = 1$	
$3 - 2 = 1$	
$4 - 2 = 2$	
$5 - 2 = 3$	
$8 - 3 = 5$	
$10 - 8 = 2$	
$15 - 10 = 5$	
$13 - 12 = 1$	

a) ¿Qué propiedad encontramos en este caso? Explíquenlo con sus propias palabras

Tabla de potencias en base 3

n	3^n	n	3^n
1	3	16	43.046.721
2	9	17	129.140.163
3	27	18	387.420.489
4	81	19	1.162.261.467
5	243	20	3.486.784.401
6	729	21	10.460.353.203
7	2.187	22	31.381.059.609
8	6.561	23	94.143.178.827
9	19.683	24	282.429.536.481
10	59.049	25	847.288.609.443
11	177.147	26	2.541.865.828.329
12	531.441	27	7.625.597.484.987
13	1.594.323	28	22.876.792.454.961
14	4.782.969	29	68.630.377.364.883
15	14.348.907	30	205.891.132.094.649

Guía para el estudiante. Actividad didáctica N°3

Nombres:		Curso:		Fecha:	
-----------------	--	---------------	--	---------------	--

Instrucciones:

- La forma de trabajar será en duplas.
- No se permite el uso de celular o calculadora durante el desarrollo de la guía.

Actividad 1:

Completa la siguiente tabla con los elementos faltantes, luego responde las preguntas que vienen a continuación.

Potencia	Base	Exponente	Logaritmo
$6^2 = 36$	6	2	$\log_6(36) = 2$
$2^0 =$			
$2^1 =$			
$3^0 =$			
$3^1 =$			
$4^0 =$			
$4^1 =$			
$5^0 =$			
$5^1 =$			

a) ¿Qué generalizaciones pueden realizar a partir del análisis de la tabla?

b) ¿Podrían estas generalizaciones encontradas ser consideradas como propiedades de los logaritmos? ¿Por qué?