FACULTAD DE EDUCACIÓN
PROGRAMA DE FORMACIÓN PEDAGÓGICA
SEDE DE LA PATAGONIA - PUERTO MONTT

TRANSPOSICIÓN DIDÁCTICA DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA EN EL CURRÍCULUM NACIONAL

Tesina para optar al Grado de Licenciado en Educación

Profesor tutor: Mg. Merardo Pinilla Oliva
Estudiantes: Julia Inés Huinca Muñoz
Rodrigo Pacheco Brintrup
Jaime Sanhueza Guzmán

Puerto Montt, Chile
2022

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos a nuestros profesores del Programa de Formación Pedagógica de la Universidad San Sebastián, que nos acompañaron en este proceso de aprendizaje, en especial a nuestro profesor guía, Merardo, que sin duda nos mostró la ruta cuando la brújula giraba sin sentido. Y a la profesora Francisca que nos encausaba cuando parecía que nos salíamos del camino. Gracias, queridos profesores.

Quiero dar gracias a la vida por permitirme incursionar en la Pedagogía a mis 41 años, hoy siento que me arrimo a un gran árbol de altura infinita. Y a quienes me permitieron llegar a este momento, en especial a Agustina; Amaya; Hernán Patricio; Ana Carolina; Neti; Susi; a los colegas del Colegio Calbuco y del PFP USS por su respaldo.
(Rodrigo Pacheco).

Agradecer a mi familia, a mi sabia madre Ana y a mis hermanas que me apoyaron y alentaron a seguir adelante en este desafío. Y por sobre todo a Dios, quien a pesar de que me di una vuelta larga por la vida, Él siempre me trajo a destino.
(Julia Huinca).

Son pocas las líneas para poder agradecer por este nuevo logro en mi vida, a mis colegas Julia y Rodrigo, gracias por soportarme. Pero sin duda a mi amada esposa Sussy, que sin ella no sería el hombre feliz que soy en la vida, a mi hijo Daniel, quien, de una forma u otra, me replantea día a día a tomar nuevos desafíos, a mis hermanos que siempre me acompañan y por último a mi madre y mi padre que, desde el cielo, guían mi vida para ser cada día una mejor persona. A todos ellos infinitas gracias.
(Jaime Sanhueza)

FACULTAD DE EDUCACIÓN
PROGRAMA FORMACIÓN PEDAGÓGICA
SEDE DE LA PATAGONIA – PUERTO MONTT

CALIFICACIÓN DEL EXAMEN DE GRADO

En Puerto Montt, el 27 de enero de 2023 los abajo firmantes dejan constancia de que los estudiantes:

Julia Huinca Muñoz, Rodrigo Pacheco Brintrup,
Jaime Sanhueza Guzmán

del Programa Formación Pedagógica para Licenciados y/o Profesionales, en el área de Matemática, han aprobado el examen de grado con las siguientes calificaciones:

Nombre estudiante	Calificación
Julia Huinca M.	7,0
Rodrigo Pacheco B.	7,0
Jaime Sanhueza G.	7,0

Firma Docente evaluador/a

Firma Docente evaluador/a

Firma Docente evaluador/a

TABLA DE CONTENIDOS

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE IMÁGENES

RESUMEN

El concepto de función juega un papel fundamental y central en la historia de la matemática, en particular en la educación matemática, es tal su importancia para disciplinas como el análisis matemático, topología, teoría de la medida, entre otras. Esto se comprende de tal manera que sea un objeto matemático relevante en la enseñanza media y superior en nuestro país.

Según diversos estudios, este objeto matemático ha presentado dificultades para ser comprendido durante el proceso de enseñanza y aprendizaje, lo que ha llevado a generar interés en el estudio de esta problemática.

Diferentes investigadores han señalado la importancia de explorar estudios históricos-epistemológicos en educación matemática (Jankvist, 2009) ; (Tzankis & Arcavi, 2000); (Bakker & Gravemeijer, 2006). Se observará la relevancia del estudio histórico epistemológico de la función cuadrática presentada en el texto del estudiante, esto permite evidenciar problemáticas en la reconstrucción de este objeto matemático.

En este estudio se considerará la transposición didáctica externa mencionado en el marco teórico propuesto por el matemático Yves Chevallard 1980, a partir de lo cual se realizó un contraste entre el aspecto histórico epistemológico de la función cuadrática, frente a los objetivos de aprendizaje presentados en el marco curricular, y contrastada con las representaciones de ésta en el texto del estudiante.

Se evidenció que no se consideran todas las representaciones matemáticas de este objeto en estudio, surgidas desde su evolución histórica, y que, al ser presentados como contenidos a enseñar, solo permite una reconstrucción parcial por parte de los estudiantes.

Palabras claves: Transposición Didáctica, Función cuadrática, marco curricular, texto del estudiante de segundo medio.

ABSTRACT

The concept of function plays a pivotal role in Mathematics' history, in its math education particularly. Math is important for disciples, such as math analysis, topology, and measure theory. This is understood in a way that it is a relevant mathematical object in secondary and tertiary education.

According to diverse studies, this mathematical object has presented difficulties to be comprehended during teaching-learning, thus it has generated interest to study this problem.

Different investigators have highlighted the importance of exploring historical-epistemological studies in Math education (Jankvist, 2009) ; (Tzankis & Arcavi, 2000); (Bakker & Gravemeijer, 2006). The relevance of historical-epistemological studies on the quadratic function presented in the student's text permits feature problems in the reconstruction of this mathematical object.

This research it is considered the external didactic transposition mentioned in the theoretical framework created by the mathematical Yves Chevallard in 1980, from which a contrast between the historical-epistemological aspect of the quadratic function, the learning objectives presented in the curricular framework and the representations of the quadratic function in the student's text was done.

It was evidenced that not all the mathematical representations are considered in this object under study, arising from its historical evolution, and that, being presented as contents to be taught, only allows a partial reconstruction by the students.

Keywords: Didactic transposition, quadratic function, curricular framework, the second year of high school student's text.

INTRODUCCIÓN

El currículum nacional en matemáticas presenta un plan de estudio que tiene por objetivo entregar el conocimiento matemático a través de Resultados de Aprendizaje, busca potenciar las habilidades de los estudiantes en ámbitos como la resolución de problemas, modelación, argumentación y comunicación. Lo que se acompaña con objetivos actitudinales transversales los cuales son trabajo en equipo, perseverancia, tolerancia con las distintas ideas, entre otros.

El currículum nacional (2018), con la última actualización para el nivel escolar de segundo medio, tiene como objeto del proceso de enseñanza-aprendizaje la función cuadrática, objeto matemático propuesto en la unidad 2 de contenidos a tratar, relacionado con los objetivos de aprendizajes OA3, a saber, mostrar que comprenden la función cuadrática y OA4, resolver, de manera concreta, pictórica y simbólica o usando herramientas tecnológicas, ecuaciones cuadráticas de la forma $ax^2=b$, $(ax + b)^2 = c$, $ax^2 + bx = 0$, $ax^2 + bx = c$ (a, b, c son números racionales, $a \neq 0$) para ser enseñados en el aula, material que será revisado en este trabajo.

Desde la educación matemática, la función cuadrática es el primer modelo funcional de fenómenos variacionales de orden no lineal y representa un ejemplo clásico en el currículum para el desarrollo de la modelación. Schoenfeld, Smith, & Arcavi (1993) y Sierpinska (1992), muestran, que el tratamiento del concepto de función cuadrática es ostensivo, en particular, evidencian cierto grado de desarticulación con sus diferentes representaciones en el aula, lo que tiene un impacto directo en la noción de función cuadrática por parte de los estudiantes.

El diálogo existente entre el docente, el saber, y el estudiante, es decir, el sistema didáctico (Chevallard, 1985), es el fenómeno educativo en el cual este estudio establece su centro, en particular, sobre la tipología de saberes emergentes en esta interacción. Saberes que conforman la denominada transposición didáctica.

Esta investigación es cualitativa, apoyándose en una metodología histórico documental con el fin de desarrollar un estudio histórico-epistemológico y analizar los procesos de transposición didáctica en torno al concepto de función cuadrática. Este tipo de metodología se caracteriza por trabajar con documentos y textos de manera directa o indirecta.

Si bien el objeto de investigación está definido como un objeto matemático, el interés de este trabajo radica en la construcción de este concepto a nivel histórico, considerando que todo objeto matemático tiene un desarrollo y evolución en el tiempo, siendo la función cuadrática tal como la conocemos hoy, el producto del trabajo de matemáticos, inmersos en la comunidad científico-matemática. La determinación de aspectos históricos-epistemológicos permiten la reconstrucción de significados parciales estableciendo un monitoreo epistemológico, con el objetivo de caracterizar la recuperación de las características históricas en el currículum, en contraste con el libro de texto del estudiante, para configurar un estudio que evidencie el concepto y noción de la función cuadrática en la matemática escolar. Tal configuración es rescatada por una debida transformación del objeto matemático mediante la denominada transposición didáctica de Yves Chevallard, a través de los siguientes componentes indicados por; el saber sabio, saber a enseñar y saber enseñado, esencialmente el centro de este estudio son particularmente, el saber sabio y el saber enseñado, para determinar la existencia de evidencia, respecto de las preguntas o fenómenos que dan origen al objeto matemático y si estas están presentes en el currículum o en el libro de texto del estudiante de segundo medio.

Para ello definimos como objetivo general "Contrastar la evolución histórica-epistemológica de la función cuadrática frente al libro de texto de segundo medio sujeto al marco curricular nacional mediante la transposición didáctica de Chevallard".

Para presentar el análisis histórico-epistemológico del objeto matemático y la forma en que es recuperado en el currículum y libro de texto de segundo medio mediante la transposición didáctica, se plantean los siguientes capítulos:

Capítulo 1: En este capítulo se abordará la naturaleza de los objetos matemáticos, en este se expone, que los objetos que están inmersos en una comunidad científica tienen una funcionalidad y esa funcionalidad está sujeta a un contexto que esencialmente es un contexto histórico que está sujeto a tratar de responder ciertas preguntas específicas que permitieron que ese objeto haya surgido.

Capítulo 2: Para efecto de esta investigación se presenta el marco teórico de la transposición didáctica de Yves Chevallard, tipología entre saberes, la intervención de la noosfera, la transposiciones externa e interna que se deben realizar con el objeto matemático y la vigilancia epistemológica que resguarda la distancia al mirar hacia atrás en la historia.

Capítulo 3: Se expone el marco metodológico y sus principales características, tales como, la estructura con la que se va a ejecutar esta investigación, se analizará el papel de la función cuadrática en el currículum nacional y el texto de segundo medio contrastando los objetivos de aprendizaje propuestos en el currÍculum con la evolución histórica-epistemológica del objeto en estudio.

Capítulo 4: Finalmente se presentan los resultados del proceso de investigación histórica del objeto estudiado respecto al currículum nacional y el libro de texto contrastado, indicándose si se encontró evidencia del desarrollo histórico de la función cuadrática en el libro de texto, y si se da cuenta de la reconstrucción de significados parciales y de la evolución histórica del objeto.

Capítulo 5: Se entregan las conclusiones y consideraciones finales a manera de reflexión en miras de diseñar actividades de aprendizaje que permitan a los estudiantes construir aprendizaje en función del objeto matemático tratado.

1 CAPÍTULO 1: ANTECEDENTES, PROBLEMÁTICA, PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN, OBJETIVOS.

1.1 Antecedentes

1.1.1 Introducción

Este capítulo permitirá contextualizar la investigación, visualizando la problemática que existe en torno a una reconstrucción histórica-epistemológica del concepto de función cuadrática. Para este desarrollo se establecen tres dimensiones, el objeto matemático, los estudios históricos epistemológicos en educación matemática y el papel de la función cuadrática en el currículum nacional, donde además se revisará el texto escolar vigente como un referente que da cuenta de los lineamientos del marco curricular.

1.1.2 La naturaleza de los objetos matemáticos

El aprendizaje y comprensión de los objetos matemáticos son procesos relevados a un eje central en el desarrollo de la Educación Matemática, conocer la naturaleza, su sentido o razón de ser de los objetos matemáticos plantea que la comprensión de un objeto es más bien la captación de la funcionalidad que representa en un contexto determinado y que de dicha funcionalidad se derivan los aspectos de representación y significado, mientras que el aprendizaje se desarrolla como un recorrido distinto al proceso de creación del objeto, pues esto último, surge del descubrimiento de la funcionalidad. Cañon (1993) considera que los objetos matemáticos son «cosas» que satisfacen unas determinadas relaciones. Estas relaciones caracterizan un «estado de las cosas» y este estado sería el objeto matemático.

Los objetos matemáticos surgen desde una cierta caracterización del mundo físico-sensible sujeto al conocimiento previo y el conocimiento del contexto. El objeto es o representa una función o funcionalidad que organiza o interpreta el contexto. Por lo tanto, los objetos tienen existencia real pero no material. Su descubrimiento no es una experiencia exclusivamente física o sensible, si no es necesario que intervenga la razón.

Por ejemplo, el hecho práctico de interpretar y simplificar la representación del mundo físico pudo motivar la abstracción (o conceptualización) de ciertas cualidades de este contexto y, asociados a la forma del contorno, a la superficie limitada, a la cardinalidad, etc., surgen objetos matemáticos diversos (formas geométricas, área, número natural, etc.). La existencia funcional hace necesaria una representación externa o un signo que permita su expresión y reconocimiento. Los objetos matemáticos admiten representaciones diversas según la naturaleza de los signos que configuran el contexto desde el que se elabora la representación (Pecharromán, 2013). Cada representación debe remitir a la funcionalidad asociada al objeto matemático y debe mantener invariantes sus propiedades. Sin embargo, la forma en la que cada representación ofrece la información sobre el objeto es distinta, y se enfatizan ciertos aspectos en detrimento de otros, lo que hace que el tipo de actividad con el objeto predisponga el uso de una u otra representación. Es por esto que el lenguaje matemático surge asociado a la representación de los objetos matemáticos y a su dinámica o sintaxis representacional en y entre los registros semióticos.

Por otra parte, la variación de contexto, entendiéndose como la necesidad de interpretar, organizar y representar, hace necesario que se reinterprete el objeto inicial o se creen nuevos objetos asociados a esa funcionalidad, pero desde un contexto distinto. Por ejemplo, al sustituir el quinto postulado de Euclides por su negación, se generan espacios no euclídeos en los que hay que reinterpretar objetos conocidos, como el caso del objeto de rectas paralelas, que representa a dos rectas que no se cortan (funcionalidad) y tiene expresión y propiedades diferentes en el contexto euclídeo y en el no euclídeo.

El significado de un objeto matemático se desarrolla desde la funcionalidad organizativa, por lo tanto, el contexto debe influenciar en el acceso y significado. Indicando que el significado de un concepto se deriva del contexto en el que está implicado. Por ejemplo, una función representa una relación entre dos variables, pero bajo el símbolo de integral definida representa el integrando o en una ecuación diferencial es la incógnita. Pecharromán (2013) establece; desde un punto de vista general, es decir, sin considerar las experiencias con las que un individuo pueda percibir ciertos objetos matemáticos en el contexto del mundo sensible, el aprendizaje de los objetos matemáticos parte necesariamente de sus representaciones. Las representaciones del objeto permiten su expresión y deben ser el medio para llegar a observar la funcionalidad que representa el objeto. Considerando el contexto como medio que permite observar la funcionalidad que representa el objeto y, por tanto, que permite que la representación adecuada exprese al objeto.

Tabla 1.- Naturaleza de los objetos matemáticos

Necesidades vinculadas al mundo físico	**Cualidades (abstracciones del contexto)**	**Objetos Matemáticos**
Conocer dimensiones de un lugar (ejemplo una laguna)	superficies limitadas	área
Representar la relación entre magnitudes (temperatura ambiental y crecimiento vegetal)	relacionar	función
Delimitar espacios de cultivos de tierra cercanos al mar/ dividir tierras en herencia	formas de contorno	formas geométricas (cuadrados triángulos etc..)
Ordenar ovejas por colores	clasificar	conjuntos

Fuente. Elaboración propia

Tal observación nos permite evidenciar la necesaria emergencia de la comprensión del de la función cuadrática en sus dimensiones de funcionalidad, representación y significado en el contexto histórico del desarrollo de la matemática, y en comparativa respecto del currículum nacional, que nos permita la construcción de caracterizaciones didácticas situadas en el texto escolar de segundo medio.

*1.1.3 **La Importancia de los estudios históricos-epistemológicos en educación matemática***

La interacción entre historia, educación y matemáticas como tres dimensiones diferentes pero complementarias, constituye lo que es potencialmente interesante, estimulante y beneficioso para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas como asignatura. La historia apunta a la naturaleza no absoluta del conocimiento humano: lo que es aceptable ya que el conocimiento es "dependiente del tiempo" (la historicidad es una característica básica) y está potencialmente sujeto a cambios. La educación enfatiza el hecho de que los seres humanos son diferentes en varios aspectos. dependiendo de la edad, las condiciones sociales, la tradición cultural, las características individuales, etc., y de esta manera ayuda a comprender estas diferencias y ser más tolerantes.

Diferentes investigadores han señalado la importancia de explorar estudios históricos-epistemológicos en educación matemática (Smestad, Jankvist, & Clark, 2014); (Clark, 2012); (Jankvist, 2009) ; (Tzankis & Arcavi, 2000); (Bakker & Gravemeijer, 2006). Recientemente, en el ICME 2016 celebrado en Alemania se presentaron dos grupos de discusión, a saber, History of the teaching and learning of mathematics y The role of history of mathematics in mathematics education, estos discuten las aportaciones que hacen este tipo de investigaciones históricas y epistemológicas y su impacto en los procesos de enseñanza y aprendizaje permitiendo evidenciar ciertos problemas en la constitución de los conceptos matemáticos.

El estudio histórico-epistemológico atiende a la problemática fundamental de la enseñanza de la matemática como una disputa entre la obra matemática (en el sentido de Chevallard) y la matemática escolar, es en este sentido que no es trivial interpretar y reorganizar la obra matemática para precisar la reconstrucción de significados en los procesos y conceptos intervinientes junto con la identificación de los obstáculos epistemológicos (Bachelard, 1938) que subyacen en el desarrollo del conocimiento matemático, esto desde el punto de vista de su origen, evolución y estructura.

Este último razonamiento es compartido por Ruiz (1993) y Beth & J.Piaget (1980), quien indica que el análisis histórico-epistemológico tendrá la intención no sólo de poner de manifiesto la diversidad de puntos de vista que se han manifestado, algunos de los cuales en su tiempo se han considerado correctos para después ser rechazados o modificados; sino también la de buscar elementos epistemológicos constitutivos del significado del objeto, su adaptación a la resolución de distintos problemas y la identificación de obstáculos ligados a su desarrollo. Desde su perspectiva, la importancia de generar un análisis del devenir histórico es entenderlo como una herramienta cognitiva, puesto que pretendemos encontrar en la historia elementos que ayuden a la comprensión del aprendizaje de un concepto matemático, cuyo fin último es transformar la información recopilada en fuente de hipótesis y elementos para el diseño de actividades didácticas centradas en dicho objeto matemático, así como para la identificación de etapas de su construcción en los estudiantes.

1.1.4 ***Aproximaciones a estudios de carácter histórico-epistemológico y la transposición didáctica en educación matemática.***

En la siguiente sección se expone una búsqueda de investigaciones que se enmarcan en el estudio histórico-epistemológico sobre conceptos matemáticos, y en particular sobre la Función Cuadrática. Esta revisión estará centrada en el acta Latinoamericana de Matemática Educativa, Análisis Histórico-Epistemológico en La Educación Matemática, según este, desarrollar un análisis histórico-epistemológico considera las circunstancias y los medios que posibilitaron el surgimiento de los conceptos y las nociones matemáticas, en tanto que permite:

- Proveer de historicidad a los conceptos matemáticos que la enseñanza usual presenta como objetos universales.
- Proveer de historicidad a las nociones matemáticas y protomatemáticas[1], tales como el rigor, mostrando que no existe un rigor eterno y perfecto en matemáticas.
- Posibilita la observación de las disparidades entre el saber científico y el enseñado (Chevallard, 1991) demostrando que no es cierto que los objetos de enseñanza en la escuela son copias de los objetos de la ciencia.

En *Concepciones de los alumnos de secundaria sobre la noción de función. Análisis epistemológico y didáctico* (Ruiz, 1993). Estudia desde un punto de vista histórico-epistemológico la evolución de la noción de función, identificando las variables y factores condicionantes que han determinado distintos estadios en su desarrollo. Cabe destacar la caracterización de la transposición didáctica de la noción de función en los textos escolares y sus implicaciones didácticas. En este se concluye que el concepto de función

- [1] Nociones matemáticas: estas nociones por lo general son construidas o definidas y son objetos de estudio por parte de los matemáticos) y (Nociones protomatemáticas: estas nociones son capacidades o habilidades, que se espera que el alumno adquiera sin que estas sean explicadas. (Extraído del texto, “La transposición didáctica: un ejemplo en el sistema educativo costarricense. Alfaro (Alfaro & Chavarría, 2012) (p. 154).

inicia desde su definición formal pero despersonalizada y descontextualizada de los saberes yendo de lo general a lo particular.

M. Anacona en *La Historia de las Matemáticas en la Educación Matemática*, reflexiona sobre la consideración de que en algunos estudios históricos acerca del desarrollo de un concepto se evidencian elementos lógicos y epistemológicos claves en el proceso de constitución teórica que posibilitan una mejor comprensión y revelan aspectos característicos de la actividad matemática (Anacona, 2003). Según M. Anacona, la complejidad de esta problemática expresa la necesidad de continuar en esta reflexión, a través de propuestas y prácticas educativas, programas de formación, diversas estrategias de difusión, y naturalmente a través de proyectos de investigación.

En *Un ejercicio de transposición didáctica en torno al Concepto de Número Natural en el preescolar y el Primer grado de Educación Básica* (Vázquez, 2010) elabora una revisión de la evolución a lo largo de la historia y caracteriza las diferentes formalizaciones del número natural, identificando dos tendencias, a saber: una agenda que se orienta hacia la determinación del número natural y otra que se enfoca en la definición de la estructura matemática que da sentido y significado a tal concepto.

En lo relativo a la transposición didáctica (Alfaro & Chavarría, 2012), en *La Transposición Didáctica: Un ejemplo en el sistema costarricense,* consideran algunas de las ideas fundamentales de Yves Chevallard (1980) en la teoría sobre la transposición didáctica, a partir de las cuales se hará un análisis de la transformación que sufre un conocimiento desde el nivel matemático hasta el nivel escolar. Para evidenciar esta transformación, se analiza el tema del conjunto de los números enteros, el cual está planteado en el programa de estudios de séptimo año en el sistema educativo costarricense. En este trabajo se revela la existencia de una evidente distancia entre cada uno de los saberes vinculados a la enseñanza y aprendizaje de los fundamentos del conjunto de los números enteros en el nivel de sétimo año de la educación costarricense. Concluyendo que los objetivos propuestos por el programa de séptimo año del Ministerio de Educación Pública son muy generales lo que puede permitir abordajes muy profundos o tan generales como los mismos objetivos.

En este estudio nos situamos desde la Transposición Didáctica de Yves Chevallard (1980) dada la débil articulación en el currículum chileno de representaciones propias de los tipos de pensamientos teórico y práctico asociados a la función cuadrática, cuestión que se evidencia en secciones posteriores.

1.1.5 Estudio histórico-epistemológico de la función cuadrática

El concepto de función como se define actualmente en matemáticas es un objeto elaborado como consecuencia de numerosas generalizaciones realizadas a través de una evolución de más de 2000 años.

Ugalde, (2014) menciona el desarrollo del concepto de función a lo largo de la historia, iniciando desde una simple observación de los fenómenos de la naturaleza para explicar los fenómenos, pasando por aspectos culturales, hasta poder llegar a la definición del concepto:

> No es de extrañarse entonces que el desarrollo del concepto de función a lo largo de la historia vaya de la mano con los diferentes intereses de la humanidad en entender y tratar de describir la naturaleza en la que vive. Como se verá más adelante, este interés se concentra primero en la simple observación y tabulación primitiva de algunos fenómenos o cuentas. Piénsese aquí sobre las culturas de la antigüedad. Luego, se basa en razonamientos filosóficos, algunas veces religiosos, como es el caso de la Grecia clásica, para después de muchos años dar paso a un proceso más científico, apoyado en observaciones y cuantificaciones serías del entorno; para culminar, luego de un esfuerzo en conjunto por muchos grandes matemáticos, en un objeto perfectamente definido, inherente a toda la matemática que se desarrolla hoy en día, y con una demostrada utilidad a la hora de modelar el mundo y las leyes que lo rigen. (p.2)

Iniciaremos entonces el recorrido en la historia de la función cuadrática para establecer la evolución de este concepto para llegar a la actual definición que se registra en los textos de segundo medio del sistema escolar nacional.

1.1.5.1 **Evolución histórica de la noción de función cuadrática.**

El análisis histórico se ha dividido en varias secciones de acuerdo con los antecedentes y a los problemas más representativos de su evolución. Se desarrolla a continuación cuáles han sido las principales etapas de evolución.

1.1.5.1.1 Época Antigua:

En el mundo antiguo, las civilizaciones babilónicas y la griega, la matemática, desde el punto de vista del concepto de función, se limitaba a la elaboración de tablas de medición de fenómenos observados, estudios de diversos casos de dependencia entre cantidades y magnitudes, pero lejos aún del concepto de función o de variables (Boyer, 2015)

1.1.5.1.2 Los babilonios (2000 a.C. – 500 a.C.):

Los babilonios crearon dentro de su civilización, tablas numéricas que representan resultados de operaciones como suma, multiplicaciones, divisiones acerca de cuadrados, cubos, raíces cúbicas y cuadradas. Además de ello, se destacan las fórmulas de la suma de los primeros números de una progresión geométrica y de los números pitagóricos, tenían un desarrollado manejo de las expresiones algebraicas, caracterizado por la sustitución, el cambio de variables, y hasta el uso de la ley exponencial. Conocían la fórmula de la ecuación de segundo grado, e incluso reducían ecuaciones de grado superior, con cambios de variables incluidos, a las de segundo grado.

Se debe tener en cuenta que en estas primeras civilizaciones todo se hacía con aspectos físicos, es decir, con la medida de los astros, además se empiezan a relacionar “variables o elementos en el desarrollo de este concepto” en donde a cada elemento le era asignado mediante el dibujo de la tabla algún otro elemento.

Si bien los babilonios no manejaban aún el concepto de función, podemos observar que se empieza a gestar la operación de la relación, que es un principio intuitivo del concepto de función, así lo mencionan (Sastre, Rey, & Boubée, 2008, p.143):

> La noción de este concepto se encuentra implícita en las tablillas astronómicas, ya que éstas reflejaban observaciones directas de fenómenos enlazados por una relación aritmética, como, por ejemplo, los períodos de visibilidad de un planeta y la distancia angular de ese planeta al Sol”.

Imagen 1: Tablilla babilónica***.***

Fuente: (Sastre, Rey, & Boubée, 2008)

Estas tablillas suelen estar dispuestas en dos columnas, de manera similar a como se construyen las tablas en la actualidad para cualquier función.

Aunque no utilizaban letras para representar cantidades variables como x e y, se utilizaban los mismos términos como, longitud, anchura, área y volumen, por ejemplo: n de longitud +m de longitud = n+m de longitud

No se puede asegurar que los babilonios expresaran sus resultados de forma general. En las tablillas solo consta el estudio de casos concretos, sin ninguna formación o formulación genérica. De acuerdo con lo que señala (Ruiz, 1993):

> Podemos afirmar, pues, que este instinto de funcionalidad de los matemáticos y astrónomos babilónicos se manifestó en sus trabajos de profundización en los métodos cuantitativos a través de sus intentos de aritmetizar observaciones difícilmente medibles, ya que no se limitaron a una simple tabulación de datos empíricos, sino que usaron interpolaciones y extrapolaciones en una búsqueda de regularidades. Esta búsqueda de regularidades en sus tabulaciones es quizás su más importante característica, aunque verdaderamente, existe una distancia muy grande entre el "instinto de funcionalidad" y la noción de función

1.1.5.1.3 Los griegos:

Se puede hablar en la cultura griega de dos aspectos: uno de carácter aritmético y el otro geométrico. Con respecto a lo aritmético, la escuela pitagórica establece razonamientos numéricos para sucesiones y progresiones*.* (Ruiz, 1993) *indica:*

> "Intentaron relacionar y las magnitudes por medio de las proporciones, ello les permitía resolver algebraicamente los problemas geométricos. Las proporciones representaban la razón numérica, que se puede establecer entre dos cantidades de una misma magnitud.

Por lo anterior se vieron limitados en poder ver la relación de dependencia en proporciones de magnitudes diferentes lo que les hubiera aproximado a considerar la relación de función. *"C*onsideran el cambio y el movimiento como algo externo a las matemáticas, lo cual lleva a hablar en términos de incógnitas e indeterminadas más que en términos de variables. Esto conduce a las proporciones y ecuaciones, y no a las funciones" (Ruiz, 1993):

Por su parte lo geométrico, tiene como representante a Euclides quien en los Elementos ofrece una noción más estructurada del concepto de cuadrado desde una perspectiva geométrica.

1.1.5.1.4 Edad Media: Destaca las representaciones cinemáticas y geométricas

La Edad Media comienza con la caída de Roma en el año 476 d.C., y finaliza en el año 1453. Se vislumbraron los primeros intentos para representar mediante gráficas sencillas los movimientos y cambios observados en los fenómenos naturales.

Este periodo aparece algunas nociones generales en relación con la geometría o mecánica, donde se destaca el estudio movimiento relacionado a fenómenos naturales, como: calor, luz, color, densidad, distancia y velocidad media de un movimiento uniformemente acelerado con el fin de proporcionar modelos para dar respuesta a las preguntas surgidas en ese momento. Así, la evolución de la noción de función se dio asociada al estudio del cambio, en particular del movimiento.

El estudio del cambio se inicia con la representación gráfico-geométrica, construida por Nicolás Oresme (1323-1382), como método para representar las propiedades cambiantes de los objetos. Oresme desarrolló una teoría geométrica de las latitudes de las formas, Ruiz (1993) señala:

> Nicolás Oresme, antes del año 1361 se le ocurrió una idea brillante: ¿por qué no hacer un dibujo-gráfico de manera en que las cosas varían? Aquí vemos una sugerencia primitiva de lo que ahora llamamos la representación gráfica de las funciones. Todo lo que varía, se sepa medir o no, escribía Oresme, lo podemos imaginar como una cantidad continua representada por un segmento rectilíneo.

Si bien durante la Edad Media se lograron algunos resultados de interés en Matemáticas, puede decirse que éstos no fueron de una gran trascendencia

1.1.5.1.5 Edad Moderna durante los siglos XV y XVI: desarrollo de la notación algebraica:

Un perfeccionamiento en el simbolismo algebraico y la formación definitiva de la trigonometría como una rama particular es lo que va a beneficiar el desarrollo del concepto de función, la primera respecto a la simbolización y la segunda respecto al estudio de las funciones trigonométricas y la expresión de lo que hoy en día consideramos variable o una función o incógnita en una ecuación.

Galileo Galilei (1564-1642) en la construcción del concepto de **función cuadrática;** particularmente se muestran algunas características de su pensamiento matemático en el momento de iniciar sus estudios, su desempeño en buscar los resultados y las relaciones que provienen de la experiencia, más que las que provienen sólo de la abstracción, como por ejemplo el calor y el frío tratarlos de forma cuantitativa.

Galileo trabajó con el movimiento y la velocidad, la aceleración y la distancia recorrida donde a través de la experiencia y la observación, realiza mediciones para obtener resultados lo más exactos posibles. Como lo indica (Ruiz, 1993), no estuvo libre de errores:

> Formulando sus leyes, volvió al viejo estilo de las proposiciones: “Si dos cuerpos están en movimiento uniforme, entonces la razón de sus velocidades es igual a la razón de la trayectoria y a la razón inversa de los tiempos”. Las expresabas, siempre de forma homogénea, es decir, e:e’= t=t´ m en lugar de e:t=e´:t´, expresión que para nosotros es equivalente y permite poner de manifiesto la idea de velocidad constante que caracteriza a dicho movimiento. No obstante, esta insistencia de Galileo por estudiar los movimientos de forma cuantitativa por medio de la experimentación ha contribuido enormemente a la evolución de la noción de función.

1.1.5.1.6 Modelación de fenómenos cuadráticos:

Galileo Galilei, fue el primero en establecer una relación entre variables, tomando la noción de función cuadrática como modelación de fenómenos físicos, en particular el lanzamiento de una bala. (Farfán & García, 2015) indican:

> …prosigue lo iniciado en el periodo anterior, sin embargo, ahora no solamente es la abstracción, si no que definitivamente se llega a la modelización matemática de los fenómenos a través de resultados experimentales, mecanismo que ayuda a evolucionar notablemente el concepto debido a que “Galileo tuvo el deseo de relacionar de forma funcional las causas y los efectos, y esta necesidad fue un factor esencial en la concepción de la variable dependiente”.

1.1.5.1.7 Edad moderna siglos XVII y XVIII: Representación Analítica.

Es en esta época donde el concepto de función va desarrollándose con más fuerza, de acuerdo con lo señalado por (Ruiz, 1993):

> El rápido desarrollo de las matemáticas de los siglos XVII y XVIII, y muy particularmente el desarrollo del concepto de función, se inicia con la publicación de los trabajos Fermat y principalmente de Descartes al renunciar a las concepciones griegas de número y magnitud, quienes utilizando el conocimiento algebraico comienzan a descubrir las expresiones analíticas de las funciones estableciendo un puente para transitar entre la geometría y el álgebra, lo que permite asociar curvas y ecuaciones definidas y su representación en un sistema de coordenadas, por una ecuación indeterminada en dos incógnitas, llamada la ecuación de la curva, es aquí donde por primera vez, y de una forma completamente clara, se sostiene la idea de que una ecuación en x e y es un medio para introducir una dependencia entre dos cantidades, de manera que permite el cálculo de los valores de una de ellas correspondiente a los valores dados de la otra.

Siguiendo la línea histórica concebida anteriormente, llegamos al siglo XVIII donde analizan los fenómenos físicos a través de un objeto matemático de naturaleza eminentemente analítica que deja de ser la curva para llegar a ser la función, impregnada aún de las ideas infinitesimalistas de Leibnitz, la poderosa herramienta que este último ha legado.

Bernoulli y Euler, serán las figuras del siglo XVIII, con quienes la noción de función es considerada una expresión analítica, proponiendo el primero de ellos, la letra griega f para designar la característica de una función, escribiendo entonces: << f x >>, lo que evolucionará con Euler, para escribirse como f(x) (Farfán & García, 2015) indican:

> Lo anterior es observable cuando el concepto de función es fundamental en la nueva disciplina que Euler estructura a través de conjuntar al Cálculo Diferencial de Leibnitz con el Método de fluxiones de Newton, de donde emerge el Análisis Matemático, disciplina que estudia los procesos infinitos.

1.1.5.1.8 Edad moderna siglos XIX- inicio siglo XX

Finalmente, el concepto de función se consolida del siglo XIX hacia la primera parte del siglo XX, cuando este concepto juega un papel central en la gran mayoría de las áreas del quehacer matemático.

Con G. L. Dirichlet se dedicó a la tarea de convertir el trabajo de Fourier en un trabajo matemáticamente aceptable, encontrando que el resultado de Fourier, que afirmaba que toda función podía ser representada por una expansión en series, era falso. Dirichlet estableció las condiciones suficientes para que tal representación sea posible, en el año 1829 llega a formular por primera vez el concepto moderno de una función y = *f*(*x*), de acuerdo con lo señalado por (Cuevas & Díaz, 2013):

> Las condiciones de Dirichlet son:
> 1. Que la curva tuviera solamente un número finito de discontinuidades (saltos o rupturas) para el mismo intervalo.
> 2. Que el número de máximos y mínimos relativos sobre la curva fuera finito (esto es, no-infinito) sobre un intervalo.
> Dirichlet dio su famoso ejemplo de función: $f(x) = \begin{cases} \text{m, si x es racional} \\ \text{P, si x es irracional} \end{cases}$
>
> como una función que no satisface las condiciones de su teorema (p. 171)

Antes las funciones se concebían como expresiones analíticas o curvas, y es Dirichlet quien, por primera vez, considera a una función como una “correspondencia”. Presenta el primer ejemplo explícito de una función que no está dada por una expresión analítica, ni tampoco posee una gráfica o curva que la represente, tampoco la necesidad de dar a la función por medio de una sola fórmula. (Cuevas & Díaz, 2013)

La intención era desligar el concepto de función de fenómenos físicos o de fórmulas concretas, representado de manera más sencilla:

Sería tarea de los matemáticos que vivieron en la época de la teoría de conjuntos, muchos años más tarde, agregar las palabras “perteneciendo a un conjunto” en los lugares apropiados.

Bajo el nombre de Nicolás Bourbaki, nombre colectivo con el que se hicieron conocer un grupo de matemáticos franceses, quienes relacionaron el dominio y el rango de la función, (Cuevas & Díaz, 2013) lo mencionan:

“...en 1939 aparece publicada en la serie Bourbaki la definición de función más aceptada hasta nuestros días que se caracterizó por la arbitrariedad del dominio y el rango. Bourbaki, dio una formulación general de función como una regla de correspondencia entre el dominio y el rango, donde ambos conjuntos son arbitrarios”

1.1.5.2 Evolución del concepto cuadrático en la historia de las matemáticas

En el siguiente cuadro, se expone un resumen de los cuatro momentos históricos destacados que permite ver cómo se abordó el concepto de cuadrado y su evolución histórica que fueron dando la base para llegar al objeto en estudio de la función cuadrática: que conocemos hoy en día.

Tabla 2: Evolución histórica de las representaciones del concepto de cuadrático.

Representación	Tema destacado
ECUACIÓN “El concepto de ecuación es uno de los más importantes del álgebra actual, y ha estado presente a través de la historia en diversas culturas ligada en muchos casos a situaciones donde intervienen nociones cuadráticas” (Mesa & Villa, 2008), (p. 923) .	Babilonios presentan la concepción de la aritmética que llevaba a la ecuación cuadrática • Cálculos astronómicos, astrología. • Conteo: tablas sexagesimales de cuadrados y de raíces cuadradas, de cubos y raíces cúbicas. • Tablas de logaritmos. • Progresiones geométricas
	Griegos: “razonamientos numéricos para sucesiones y progresiones” desde lo aritmético y lo geométrico con Euclides “quien en los Elementos ofrece una noción más estructurada del concepto de cuadrado” ● Problemas de movimiento, continuidad y del infinito ● Proporciones y ecuaciones. ● Inconmensurabilidad. ● Sentido geométrico de las magnitudes. ● Comparación entre magnitudes siempre del mismo tipo. ● Propiedades de las proporciones.
	LOS ÁRABES Árabes: “generalidad a sus procedimientos aritméticos recurriendo a la geometría para demostrar la validez de sus razonamientos” (Vargas, 2011) (p. 4)

CÓNICA "Apolonio de Perga (260 a.C), quien realiza un tratado sobre el estudio de las secciones cónicas que fue de gran trascendencia para el posterior desarrollo de la geometría analítica y los estudios del movimiento" (Mesa & Villa, 2008) (p. 925)	Las cónicas, con la formulación de estas por Apolonio y el significado dado al término "parábola" y en el siglo XVII al relacionarlas como lugares geométricos con una ecuación de grado dos. • Explicación racional de los fenómenos. • Explicación de sucesos sujetos al cambio y al movimiento (Vargas, 2011) (p. 5)
CINEMÁTICA "Se destacan los trabajos sobre el movimiento de Galileo quien muestra que la expresión: "al cuadrado" significa una segunda potencia de una cantidad o el producto de un número por sí mismo, su participación en su avance o desarrollo está basado en los procesos de modelización de los fenómenos físicos. Galileo es el mayor representante de la transición entre la ecuación cuadrática relacionada con las superficies y su interpretación como modelo matemático de fenómenos físicos." (Mesa & Villa, 2008) (p. 926)	El movimiento (cinemática), aunque el concepto es muy antiguo, sólo hasta el siglo XVII los conocimientos físicos ligados a las matemáticas permitieron consolidarlo con el trabajo de Galileo Galilei con los "procesos de modelización de los fenómenos de variación" • Elaboración de símbolos para las operaciones matemáticas. • Perfeccionamiento de las notaciones sincopadas. • Estudio profundo de la astronomía. • Estudio del movimiento: velocidad, aceleración, distancia recorrida. • Logaritmos, construcción de tablas • Progresiones aritméticas y geométricas. (Vargas, 2011) (p. 6)

<table>
<tr>
<td rowspan="4">FUNCIÓN</td>
<td>La función un concepto que se formaliza con Newton al construir el cálculo diferencial, la abordaremos desde diferentes representaciones y contextos.

Siglo XVII

• Extensión del concepto de número.
• Crecimiento de los cálculos matemáticos y creación del álgebra simbólico - literal.
• Comienzo de la geometría analítica, basada especialmente en el método de coordenadas.
• Traducción de cualquier problema de la geometría plana en un problema algebraico equivalente.
• Estudio y medición del calor, presión.
• Estudio de la mecánica, relación entre movimiento rectilíneo y las fuerzas que lo afectan.
• Formación del análisis infinitesimal como culminación en el proceso del cálculo diferencial e integral.
(Vargas, 2011) (p. 7)</td>
</tr>
<tr>
<td>Siglo XVIII
• Ver las funciones como expresiones analíticas.
• Solución del problema de la cuerda vibrante.
• Construcción más abstracta y universal del concepto de función.
• Estudio de las propiedades de las funciones analíticas representadas por series entera
(Vargas, 2011) (p. 8)</td>
</tr>
<tr>
<td>Siglo XIX
• Funciones como correspondencia.
• Propiedades de las funciones con más rigor.
• Liberación de la intuición geométrica.
(Vargas, 2011) (p. 9)</td>
</tr>
<tr>
<td>Siglo XX
• Funciones como correspondencia.
• Propiedades de las funciones con más rigor.
• Liberación de la intuición geométrica.

(Vargas, 2011) (p 10)</td>
</tr>
</table>

MODELIZACIÓN CUADRÁTICA	Galileo Galilei, fue el primero en establecer una relación entre variable tomando la noción de función cuadrática como modelación de fenómenos físicos, en particular el lanzamiento de una bala. Algunas de las características evidentes en los trabajos de Galilei (1638) para la modelización de los experimentos (fenómenos) son: • Dado un cuerpo • Se toma un plano inclinado, éste supone dos rectas una sobre la que se desliza un cuerpo y la otra servirá para calcular el tiempo transcurrido. • Registro de datos relacionando las dos variables involucradas en el fenómeno: La distancia y el tiempo. • Análisis de los datos recolectados • Concluye con una tercera variable resultado de la razón entre las otras dos, y dada la • La relación constante entre estas magnitudes permite generalizarlas. "…se establecen algunas características de la modelización en Galilei, entre ellas: la experimentación y toma de datos, el establecimiento de relaciones entre cantidades, la identificación de la variación y la creación de un modelo matemático que dé cuenta del fenómeno estudiado (Mesa & Villa, 2009) (p.1319)

Fuente: (Vargas, 2011), (Mesa & Villa, 2008), (Mesa & Villa, 2009)

Una vez de expuesta toda una revisión sobre resultados históricos-epistemológicos y referentes teóricos para situar nuestra problemática, ha quedado en evidencia la emergencia y relevancia que tiene presentar un análisis sobre el desarrollo del concepto de función cuadrática identificando las características fundamentales en su evolución y cómo estas se vinculan con el currículum escolar chileno en referencia al libro de texto.

1.2 Problemática

El concepto de función tiene un rol central en la historia de la matemática y en particular en educación matemática, es tal su importancia para disciplinas como el análisis matemático, topología, teoría de la medida, entre muchas otras, que es comprensible que de tal manera sea un objeto matemático relevante en la enseñanza media y superior de nuestro país. Diferentes investigaciones dan cuenta de la variedad de dificultades que se presentan en la enseñanza y el aprendizaje del concepto de función y particularmente de la función cuadrática, por tal motivo este concepto ha sido de gran importancia en didáctica y de gran interés para diferentes investigaciones.

Para Schoenfeld, Smith, & Arcavi (1993) y Sierpinska (1992), se establece que el estudiante conoce la fórmula cuadrática y sabe, en general, aplicarla para resolver ecuaciones cuadráticas si el ejercicio en cuestión se encuentra formulado de manera "estándar". El estudiante también conoce algo de la parábola, especialmente desde su representación a partir de los conceptos de foco y directriz, aunque no es capaz de conectar los aspectos relevantes de las representaciones simbólicas y gráficas.

Respecto al concepto de función cuadrática, se centra en los siguientes referentes investigativos; Pech & Ordaz (2010), por ejemplo, muestran una secuencia didáctica para la enseñanza de la función en estudiantes universitarios, en el cual el estudiante construye conocimiento matemático referente al concepto de función, en situaciones variacionales. Mercado, Aguas, & Arrieta, (2010) muestran a través de una secuencia didáctica la comprensión del concepto de función usando situaciones del contexto sociocultural en la práctica de modelación, aplicando un diagnóstico inicial para establecer estrategias didácticas. Estas investigaciones dan cuenta de la necesaria articulación para el conocimiento de la función cuadrática que se debe dar entre el fenómeno presentado y al representar sus variables en una gráfica. Se busca que por medio de esa articulación se llegue a la resignificación de un concepto (Briceño & Ábalos, 2016).

Cordero & Suárez (2005) investigan la parábola mediante gráficas. Se utiliza un contexto físico para que el estudiante plasme los datos de las variables del fenómeno en una gráfica. Para los autores, la graficación es el medio por el cual la relación modelación-graficación-tecnología se puede implementar en las aulas para construir significativamente conocimiento matemático. Para Villa, (2008), considera que para lograr un mejor conocimiento del concepto de función cuadrática desde la perspectiva variacional hay que tener en cuenta aspectos como la relación entre dos magnitudes, llevar los datos a una tabla, identificar la razón de cambio entre las magnitudes, reconocer la variabilidad de la razón de cambio y comprender la función como un modelo.

Desde estos referentes, es clara la emergencia de una articulación entre el concepto de función cuadrática y su representación. Se destaca que tal articulación, debe considerar aspectos históricos-epistemológicos que involucren autores y contextos determinados, que permitan a su vez, la reconstrucción de significados parciales y evidenciar las preguntas o el contexto que dio origen al objeto matemático. En el caso del aula de matemática, en relevante resignificar desde un punto de vista histórico el concepto de función cuadrática, para establecer posibles contrastes o comparativas con planes y programas institucionales y así poder determinar la coherencia con estos últimos y su relación con el sistema didáctico conformado por el profesor, el estudiante y el saber. Destacando el último componente de esta tripleta, el saber, y la relación con el saber que tiene el profesor y el estudiante en la construcción de los aprendizajes.

En lo expuesto se presentan argumentos acerca de la emergencia sobre la compresión de los objetos matemáticos, en particular de la función cuadrática con el contexto escolar y su vinculación con su evolución histórica-epistemológica y sobre un marco comprensivo como lo es la transposición didáctica. Lo anterior, para dotar al estudio de elementos de análisis sobre fenómenos didácticos tales como el diseño curricular, la delimitación de planes y programas, así como también el sistema didáctico y su tipología de saberes (Chevallard, 1991). Al respecto, (Chevallard, Bosch, y Gascón,1997) señalan que:

> Desde un punto de vista de la enseñanza, y una vez seleccionado, los contenidos de la educación obligatoria, se tiende a considerar "el problema del currículo" únicamente como una cuestión de secuenciación y temporalización de los mismos, que desemboca en el problema de la metodología de la enseñanza. (p. 122).
>
> El punto de vista de la didáctica propone que el problema de la elaboración del currículo, que tradicionalmente había sido considerado como un problema esencialmente pedagógico, tiene un componente matemático esencial. No se trata únicamente de un problema de secuenciar y temporalizar los contenidos del currículo, sino de realizar un trabajo matemático de reorganización de los elementos técnicos, tecnológicos y teóricos que componen cada obra con base en las cuestiones a las que esta responde. Se trata,

> en definitiva, de una verdadera reconstrucción creativa de las obras que forman el currículo (p. 127).

Ahora bien, desde los antecedentes investigativos, se reconoce la transposición didáctica (Chevallard, 1980) como un marco teórico que permite comprender las problemáticas relativas a los procesos de transposición y adaptación del saber implicado en el diseño curricular, ejemplo de ello es la *Transposición Didáctica: Un ejemplo en el sistema costarricense* (Alfaro & Chavarría, 2012) en donde se realiza un análisis de la transposición didáctica sobre la construcción de los números enteros planteados en los programas de estudios*.* Es por esto importante destacar de este estudio la referencia a procesos de transposición en el caso de la función cuadrática que permitan articular la obra matemática con la obra matemática escolar.

Teniendo en cuenta los referentes anteriores, se plantea la siguiente interrogante como conductor para este trabajo de investigación:

¿Cuáles son las principales características de la transposición didáctica del concepto de función cuadrática en el marco curricular nacional, en comparación con el texto actual de segundo medio 2022?

Para abordar esta interrogante, es relevante destacar, analizar y orientar el estudio sobre ciertos aspectos que se desarrollarán en secciones posteriores.

1.3 Objetivos del análisis

En la siguiente sección se presentarán los objetivos de investigación divididos entre objetivo general y objetivos específicos.

1.3.1 Objetivo General

Contrastar la evolución histórica-epistemológica de la función cuadrática frente al libro de texto de segundo medio sujeto al marco curricular nacional mediante la transposición didáctica de Chevallard.

1.3.2 Objetivos Específicos:

1. Caracterizar la evolución histórica y naturaleza de la función cuadrática.
2. Examinar los contenidos y objetivos de aprendizaje de la función cuadrática expuesta en el currículum de matemáticas de 2do medio.
3. Comparar las secuencias didácticas del libro de texto de 2do Medio en relación con el desarrollo histórico de la función cuadrática.

1.4 Pregunta de Investigación:

1. ¿Cómo se desarrolla el proceso de transposición didáctica del concepto de función cuadrática en el marco curricular nacional?
2. ¿Cuáles son las principales características expuestas del concepto de función cuadrática en el libro de texto de 2do Medio?
3. ¿Qué relaciones se establecen entre el estudio histórico-epistemológico y el libro de texto mediado por la transposición didáctica?

2 CAPÍTULO 2 : MARCO TEÓRICO

2.1 Introducción

Para efecto de nuestra investigación nos apoyamos en un marco teórico denominado la Transposición Didáctica del autor Yves Chevallard del año 1985. Este enfoque constituye un marco teórico coherente, legitimado por la comunidad científica en educación matemática, que dispone de resultados sólidamente probados y es seguido por la comunidad científica internacional que investiga en esta área.

Imagen:2: Dr. Yves Chevallard
Fuente: (USACH, 2020)

Yves Chevallard es licenciado en matemáticas e investigador de la Université d´Aix-Marseille, es un destacado investigador en la didáctica de la matemática que desde los años ochenta del siglo XX, en los que se publicaron sus primeros textos sobre la transposición didáctica y hasta la actualidad, ha sido de una gran contribución a la disciplina. Chevallard continua con los estudios que inició Michel Verret en la transposición didáctica, quien es considerado el padre de la didáctica, el cual definió la didáctica como la transmisión de aquellos que saben a aquellos que no saben. A partir de entonces, se plantea la pregunta de la caracterización del tipo de saber transmitido. No se puede enseñar un objeto sin transformación.

Chevallard (1991) va a caracterizar la transposición didáctica como la mediación que se debe desarrollar a fin de ubicar el saber científico en ámbitos escolares, lo cual implica planear un proceso de transmisión del conocimiento a partir de la interacción y la comunicación entre profesor y alumno. Según Contreras (2013) indica:

> La transposición didáctica justifica su existencia desde el momento en el que el profesor es el mediador entre el conocimiento matemático y el estudiante; pues, el estudiante casi nunca tiene acceso directo al Saber Sabio (o Saber Institucionalizado); por tanto, su desempeño está limitado a su relación personal con el docente y al aprendizaje que el profesor elige como saber a enseñar. Esta selección del saber enseñar, es una decisión del profesor, y se da en un proceso de comunicación. Por tanto, el éxito, va a depender de una situación comunicativa fuerte y de la preparación científica del profesor (p. 40)

2.2 EL CONCEPTO DE TRANSPOSICIÓN

Chevallard se interesa, en su primera obra de didáctica de las matemáticas (1985), en la relación que se lleva a cabo entre un docente, los alumnos y un saber matemático. Estos tres “lugares” forman lo que él llama un sistema didáctico y la relación ternaria, que existe entre estos tres polos, es calificada por su autor como relación didáctica.

La construcción epistemológica del concepto transposición didáctica en Chevallard inició en el campo de la didáctica de las matemáticas, donde se buscaba enriquecer los procesos de enseñanza y aprendizaje a través de estímulos para la mejor comprensión de los conceptos científicos. El autor (Chevallard, 1991) define este concepto como:

> “Un contenido del saber sabio que haya sido designado como saber a enseñar sufre a partir de entonces un conjunto de transformaciones adaptativas que van a hacerlo apto para tomar lugar entre los objetos de enseñanza. El ‘trabajo’ que un objeto de saber a enseñar hace para transformarlo en un objeto de enseñanza se llama transposición didáctica”. (p. 45)

Según Yves Chevallard la transposición didáctica puede ser entendida como el camino que conduce del saber científico al saber enseñado, entendiéndose como el proceso de llevar el saber científico al aula de tal forma que se permita a los estudiantes conocer un saber supremo. Es decir, la transformación del conocimiento científico se debe proporcionar con fines de divulgación y de aprendizaje a los estudiantes; sin embargo, a pesar de que no se orienta al campo escolar no significa que se deban hacer adaptaciones reduccionistas o simplificadas del conocimiento, sino que este proceso implica comprender la distancia que hay entre el saber académico y el saber escolar, que son de naturaleza y funciones distintas.

El concepto de transposición didáctica remite entonces al paso del saber sabio al saber enseñado y luego a la obligatoria distancia que los separa. Hay de esta forma transposición didáctica (en el sentido restringido) cuando los elementos del saber pasan al saber enseñado. Para ilustrar esta idea, el autor desarrolla un ejemplo de transposición: como lo que sucede cuando se transforma una pieza musical de violín a piano; es la misma pieza, es la misma música, pero la diferencia radica en que se encuentra escrita de manera diferente para poder ser interpretada con otros instrumentos.

Para Chevallard la transposición didáctica es ese “trabajo” que se realiza para transformar un objeto de saber enseñar en un objeto de enseñanza. De acuerdo con (Chevallard, 1991) el objeto didáctico, puede ser, representada por el esquema, en el que “el primer eslabón marca el paso de lo implícito a lo explícito, de la práctica a la teoría, de lo preconstruido a lo construido”. (p. 46)

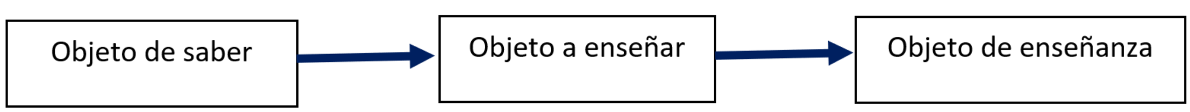


Imagen 3: Eslabones del objeto didáctico

Para lograr este último Chevallard propone definir el objeto de estudio a partir de una contextualización, sobre la base de la comprensión de la diferencia entre el saber a enseñar y el saber enseñado. Al ser material sensu lato (versión didáctica de este objeto del saber), materializa finalmente la transposición didáctica al establecer el puente entre un saber y el otro, para lo cual se requiere que haya una rigurosa vigilancia epistemológica.

La vigilancia epistemológica hace alusión al método de observación que desarrolla el didacta constantemente, a fin de garantizar que se supere adecuadamente la distancia que existe entre el saber científico y el saber enseñado, tratando de evitar las deformaciones producidas por la transposición didáctica para garantizar la calidad de la enseñanza. Resaltar que el docente no puede desarrollar esta transposición de manera antojadiza, sino que requiere descubrir lo que está oculto en la relación entre estos saberes, por lo tanto, debe desarrollar autonomía para decidir en lo que respecta a aspectos epistemológicos, estéticos y morales; en consecuencia, debe decidir cuál faceta de la ciencia mostrar. Pudiendo el profesor tomar una faceta dictatorial presentando al alumno visiones rígidas de conocimiento científico o puede presentar una actitud optimista y dinámica, dispuesto a la búsqueda de caminos cada vez mejores para la transposición didáctica.

2.2.1 ***La tripleta didáctica, noosfera y sistema didáctico***

Para definir este objeto de saber en torno a la transposición didáctica, Chevallard propone un esquema, a partir de la relación triangular entre enseñante o profesor, saber y alumno, como se observa en la Figura:

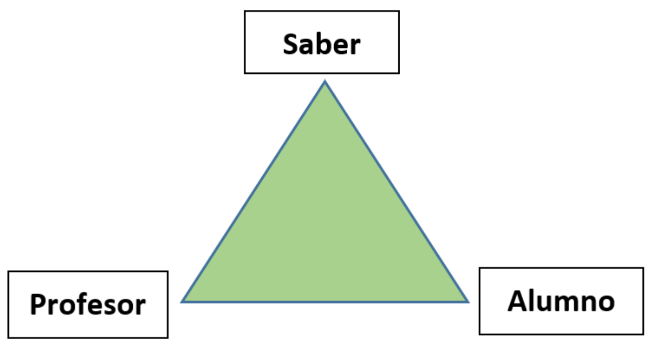


Imagen 4: Relación triangular entre profesor, saber y alumno.

Yves Chevallard establece que un sistema didáctico está constituido por: el saber, el docente y el estudiante. Es decir, traslada conocimientos científicos a conocimientos escolares

El objeto de saber corresponde a un conocimiento que pertenece al saber erudito o saber sabio, es decir, aquel que poseen y al cual siguen aportando los profesionales o investigadores.

Los expertos, por su parte, reescriben las definiciones y propiedades de estos objetos ya seleccionados en textos y manuales, donde se propone una organización y se exponen nociones de programas en capítulos. Toda esta elaboración, que tiene su mejor reflejo en los textos escolares, es lo que se llama Saber Escolar o Saber institucionalizado

Quien administra y adapta esta transposición didáctica es el profesor, él toma los objetos del saber escolar y los organiza en el tiempo de acuerdo con sus conocimientos, a su propia relación al saber y sus propias hipótesis de aprendizaje. Este saber escolar enseñado a los alumnos por el profesor se llama saber enseñado. Es importante que el profesor domine el objeto matemático que va a enseñar, de esta manera garantiza la distancia entre el saber sabio (que el profesor debe comprender) y el saber a ser enseñado (que el profesor debe hacer comprender a sus estudiantes), debe hacer una mediación entre estos dos saberes de tal forma que la distancia sea la mínima posible, para lo cual el docente debe tener la capacidad de desarrollar términos, lenguajes y formas de comunicación con el estudiante.

Es en este proceso de transposición didáctica, donde el estudiante podrá comprender el objeto matemático, además se espera que el estudiante sea capaz de analizar y reflexionar desde los conocimientos previos que ya posee y que el docente puede tomar como herramienta inicial para constituir el saber a ser enseñado.

El contrato didáctico es lo que espera el estudiante del profesor y viceversa. Las expectativas que se tienen. Es la relación entre el estudiante y el profesor a la hora de enseñar un saber concreto.

Según Chevallard, cada año, al momento del inicio del año escolar, se forma un nuevo sistema didáctico constituido por los tres sitios arriba descritos: el saber, el docente y el alumno y las interrelaciones entre ellos. Alrededor del programa (que va entonces a designar el saber a enseñar) un nuevo contrato didáctico se renueva anualmente entre un docente y sus alumnos.

Concretamente, los sistemas didácticos son formaciones que aparecen cada año hacia el mes de septiembre: alrededor de un saber (designado ordinariamente por el programa)

Se forma un contrato didáctico que toma ese saber cómo objeto de un proyecto compartido de enseñanza y aprendizaje que une en un mismo sitio, docentes y alumnos. El entorno inmediato de un sistema didáctico está constituido inicialmente por el sistema de enseñanza, que reúne el conjunto de sistemas didácticos y tiene a su lado un conjunto diversificado de dispositivos estructurales que permite el funcionamiento didáctico y que interviene en diversos niveles. (Chevallard, 1991, p. 45)

En la siguiente figura se suma al sistema didáctico la noosfera. En la noosfera participan o deben participar asociaciones de especialistas en la disciplina, comisiones sobre la enseñanza, administraciones educativas, es decir, deben intervenir especialistas en matemática, en la enseñanza de esta disciplina, psicólogos, pedagogos, fuerzas políticas, sindicales, empresariales, entre otros.

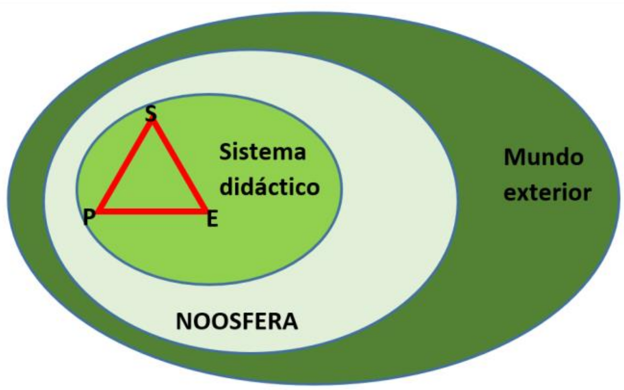


Imagen 5: Sistema didáctico de la Noosfera

La noosfera, según Chevallard (1991), es el conjunto de lugares o instancias donde se llevan a cabo las negociaciones, donde se establecen los cambios entre el sistema educativo y su entorno, es en ella donde deben proporcionarse soluciones provisorias a los problemas que se presentan en las distintas ternas didácticas con el objetivo de converger al proyecto social definido

Es importante la influencia que tiene la sociedad en el comportamiento del profesor y también de los estudiantes, pues existe un sistema educativo que determina tipos de acciones al interior del aula. Por otro lado, se encuentra; la influencia de las características de los padres de familia, quienes son los primeros formadores entregando las primeras bases del conocimiento en los estudiantes; así como la influencia de los académicos, quienes son los encargados del sistema educativo y de la producción de resultados de investigación; también la instancia política, que se describe como el órgano de gobierno de un sistema de enseñanza (programas curriculares), así también los libros de texto que ofrece el mercado.

*2.2.2 **El Saber según Chevallard***

Un concepto que es estructural para el ejercicio de la transposición didáctica es el concepto del saber. (Chevallard, 1991) expresa que “ocurre que hay saberes enseñables (y enseñados) y saberes no enseñables, o al menos no escolarizables” (p.67). Por lo tanto, expresa que, para el saber, es la transposición didáctica que permite su movilización, pero se debe hacer claridad en que hay distintos tipos de saber, considerando, que este está sometido a diversos contextos y por tanto se hallará en diferentes espacios con diferentes funciones.

En primera instancia, un saber sabio o erudito, hace referencia a aquellos conocimientos que son producidos por los investigadores de las disciplinas o, surgen propiamente del campo científico, es un conocimiento especializado, riguroso, que ha sido legitimado por una comunidad científica y que tienen intereses diferentes al de la enseñanza.

En segundo, se presume que este saber producido en las comunidades científicas no puede ser enseñado como tal, por tanto, este debe ser transformado en un saber a enseñar, y es este ámbito del saber ocupará un lugar en los planes de estudio y que, a través de teorías en educación matemática, le permite ser llevado al aula de clase mediado por el docente en matemáticas. Aquí se evidencia la intervención del sistema social que permea la educación y son quienes definen la pertinencia de los contenidos que deben ser enseñados en las instituciones escolares.

Por último, este saber a enseñar, mediado por diferentes instancias se transforma en un saber enseñado, denominado también saber escolar, el cual hace parte de las relaciones específicamente de la tripleta didáctica en el aula de matemáticas.

2.2.3 ***Estados de la transposición Didáctica***

Para Chevallard (1991), la transposición didáctica es el medio por el cual se realiza la "ficción" de efectuar transformaciones con respecto al saber en el sistema didáctico, un saber legitimado por comunidades de especialistas (saber sabio), el cual intrínsecamente se conforma de datos, historia, criterios personales, entre otros, pero, por acción de la noosfera estos conocimientos atraviesan por un proceso de adaptación que le permite convertirse en un saber a enseñar; el autor en cuestión ha planteado para el proceso de la transposición didáctica dos momentos (transposición externa y transposición interna):

Transposición externa: Es un proceso externo al aula, donde los especialistas (profesores, pedagogos, etc.) definen ese saber a enseñar, configurando el currículo del sistema educativo, este está relacionado con la puesta del texto del saber, que pone en escena los saberes didactizados. Por tanto, los saberes escolarizables requieren de un proceso que les permite llegar a convertirse en un saber enseñable, Chevallard lo denomina: la textualización del saber, la cual conlleva a una delimitación de esos conocimientos susceptibles de ser enseñados, definiendo en sí su transmisibilidad. Este ejercicio supone una manipulación del saber en algunas etapas como desincretización, despersonalización, programabilidad, publicidad y control, las cuales serán descritas a continuación:

Desincretización del saber: Hace referencia a esa primera etapa donde se delimitan los "saberes parciales", actúa en el texto mismo del saber, poniéndolos en función del sistema didáctico.

Despersonalización del saber: Se entiende como esa separación del saber de sus orígenes, específicamente de quien lo ha producido "el sujeto está expulsado de sus producciones" (Chevallard, 1991, p.71).

> Programabilidad de la adquisición del saber: está dada también por la textualización del saber, donde el saber fragmentado en unidades categóricas de esos objetos a enseñar recrea esa programabilidad. El texto del saber opera con un orden lógico (inicio-final) secuenciado por una cadena de razones, como un "programa diseñado para la enseñanza", es decir, cada fracción es guiada por un hilo conductor, "El texto autoriza una didáctica, cuya duración desmarca su diacronía y esa didáctica se legitima, entonces, por

> la ficción de una concepción del aprendizaje como" isomorfo" respecto del proceso de enseñanza cuyo modelo ordenador es el texto del saber." (Chevallard, 1991, p.73).

Publicidad del saber: En esta etapa se pone de manifiesto la publicación del saber, por ende, indica la posibilidad de obrar en él, precisa entonces su comprensión, extensión y alcance, es decir, el saber pasa de unos pocos a ser un conocimiento de la esfera pública.

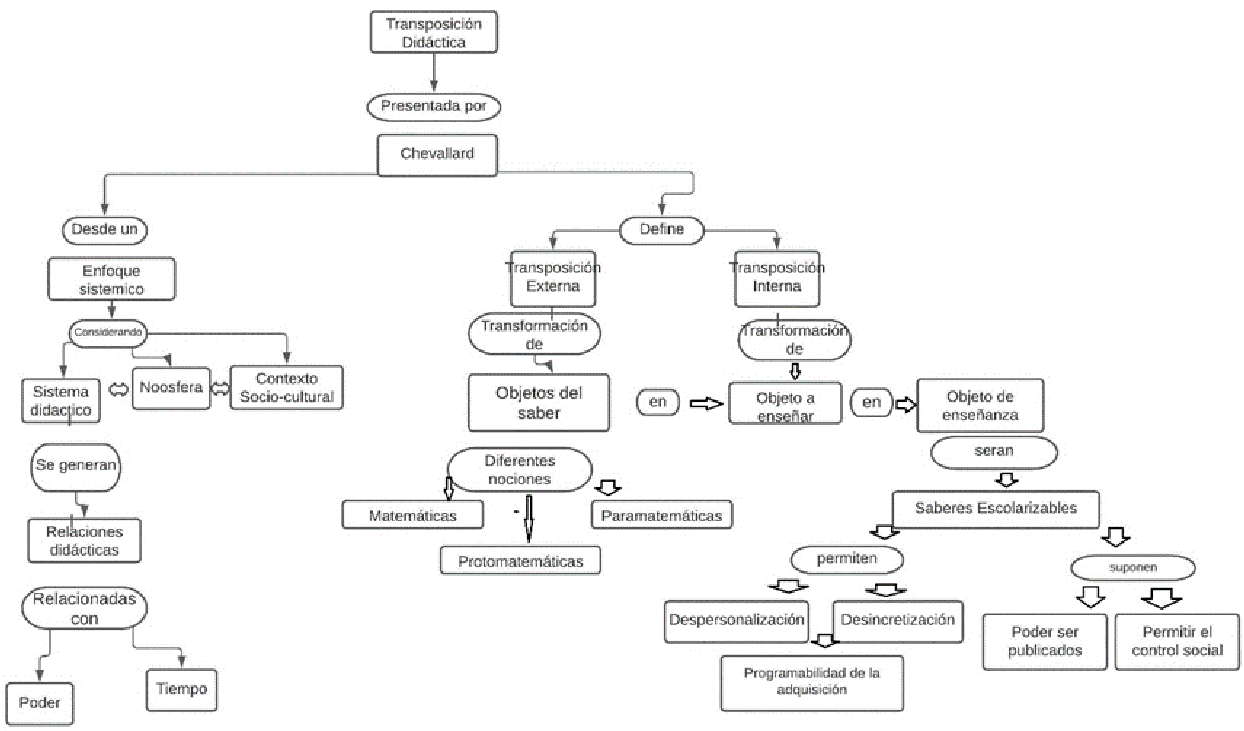
Control social de los aprendizajes: Asociado al punto anterior, la publicidad del saber permite realizar control social sobre él, pues este ha sido legitimado por la textualización, por tanto, encuadra lo enseñado y lo aprendido en relación con los actores de la tripleta didáctica. "Esta publicidad, a su vez, posibilita el control social de los aprendizajes, en una cierta concepción de que significa "saber", concepción fundada por la textualización" (Chevallard, 1991, p.73).

Transposición interna: Son todas aquellas variaciones que presenta el saber a enseñar cuando se transforma en el saber enseñado, y está acontece cuando el profesor es consciente del texto del saber y lo adapta a un ambiente de aprendizaje.

Vigilancia epistemológica: Chevallard (1991) lo define como el control de la "distancia" que media entre el objeto de conocimiento y el objeto de enseñanza. Por ello es una herramienta que precisa los diferentes dispositivos que determinan las relaciones de distancia entre el saber que se produce al llevarlo al aula y ese saber de dónde se originó, su historia, su epistemología, y cada una de las características que lo constituyeron

La siguiente imagen presenta una versión esquemática de la comprensión del marco teórico, transposición didáctica.

Imagen 6: Relación esquemática de la Transposición didáctica



Fuente: Construcción propia.

En la siguiente tabla se presentan los elementos estructurales de la transposición didáctica de Chevallard, tales como: Distancia, transformaciones del saber, momentos y proceso

Tabla 3: Elementos estructurales de la transposición didáctica de Chevallard

<table>
<tr><th>Distancia</th><th>Transformaciones del saber</th><th>Momentos</th><th colspan="2">Proceso</th></tr>
<tr><td rowspan="5">Vigilancia epistemológica

(aumenta de arriba hacia abajo)</td><td rowspan="5">Saber sabio
↓
Saber a enseñar
↓
Saber enseñado</td><td rowspan="2">Transposición externa (ocurre fuera del aula, donde los especialistas (profesores, pedagogos, etc.) definen ese saber a enseñar)</td><td>Desincretización del saber</td><td>Espacio donde se delimitan los “saberes parciales”</td></tr>
<tr><td>Despersonalización del saber</td><td>Separación del saber de sus orígenes.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Transposición interna (acontece cuando el profesor asimila el texto del saber y lo lleva al aula, lo adecua para su acto de enseñanza)</td><td>Programabilidad de la adquisición del saber (textualización del saber)</td><td>Donde el saber fragmentado en unidades categóricas de esos objetos a enseñar recrea esa programabilidad.</td></tr>
<tr><td>Publicidad del saber</td><td>El saber pasa de unos pocos a ser un conocimiento de la esfera pública.</td></tr>
<tr><td>Control social de los aprendizajes</td><td>Encuadra lo enseñado y lo aprendido en relación con los actores de la triada didáctica.</td></tr>
</table>

Fuente: (Carrillo, 2018)

3 CAPÍTULO 3: MARCO METODOLÓGICO

3.1 Introducción

La siguiente investigación es cualitativa, se apoya en una metodología histórico documental con el fin de desarrollar un estudio histórico-epistemológico y analizar los procesos de transposición didáctica en torno al concepto de función cuadrática. Este tipo de metodología se caracteriza por trabajar con documentos y textos de manera directa o indirecta. Los principios en los que se apoya este estudio son:

- Recolecta, selecciona, analiza y presenta los documentos para presentar los resultados de la investigación.
- Fundamenta el redescubrimiento de datos para generar nuevas preguntas y formas de investigación.
- Usa formas de procesamiento que se apoyan en cualquier campo de la investigación como lo son los lógicos y los mentales.
- La investigación se desarrolla de forma ordenada y con objetivos precisos, con la finalidad de ser base de la construcción de conocimientos.

Vickery (1970) señala que,

> Los métodos de recuperación, entre los que se cuenta con el análisis documental, responden a tres necesidades informativas de los usuarios, en primer lugar, conocer lo que otros pares científicos han hecho o están realizando en un campo específico, en segundo lugar, conocer segmentos específicos de información de algún documento en particular; y por último conocer la totalidad de información relevante que exista sobre un tema específico (Peña & Pirella, 2007, p.154).

Pinto, Agustín, & García (2002) establece que el análisis documental es el “complejo de operaciones que afectan al contenido y a la forma de los documentos originales, para transformarlos en otros documentos representativos de aquellos, que facilitan al usuario su identificación precisa, su recuperación y difusión” (Peña & Pirella, 2007, p.89).

Es en este contexto que la presente investigación se desarrolla una revisión documental del tipo histórica-epistemológica, junto con un estudio analítico del currículum nacional de segundo medio, teniendo presente los objetivos de aprendizaje, y el libro de texto del estudiante respecto del concepto de función cuadrática.

En este ámbito, es relevante establecer, que en un análisis documental trasciende el solo hecho de realizar una revisión para su posterior difusión, sino más hace relación al aporte que este tipo de investigaciones tienen sobre la comprensión y aprendizaje en relación con la construcción de significados parciales en un contexto particular, y para efectos de esta investigación, en el contexto educativo.

Por lo tanto, a partir de la investigación documental del tipo histórico-epistemológico se analizará la coherencia y concordancia existente entre la evolución histórica del concepto de función cuadrática en el seno de la comunidad científico-matemática, los objetivos de aprendizaje del currículum nacional para segundo medio, y los contenidos y propuestas didácticas del libro de texto del estudiante. Dicha investigación se realizará con la óptica que establece Chevallard (1980), en el marco de lo que define como una adecuada transposición didáctica, contrastando los objetivos planteados por los planes y programas con una tipología de saberes en el sistema didáctico formado por el profesor, el estudiante y el saber.

3.2 El papel de la función cuadrática en el currículum nacional

En nuestro país, el currículum ha sufrido constantes cambios y actualizaciones, los que apuntan principalmente a modernizar el propósito de la entrega de los contenidos, para este estudio se enfocó en la función cuadrática. Los dos últimos cambios en nuestro currículum fueron el año 2009 y el actual el año 2017. En el último cambio que ocurrió, en el año 2017, la función cuadrática se aborda en segundo medio. En ese año para tercero medio continúa como “objetivos fundamentales” y desde séptimo hasta primero medio como “objetivo de aprendizaje”. Cabe mencionar que el año 2017 se cambió en primero medio y el 2018 en segundo medio.

La última actualización del currículum es el año 2017, en donde entra en vigor para primero medio y para segundo medio el año 2018. En esta actualización la función cuadrática se comienza a trabajar en segundo medio, se continúa con la matemática separada por los cuatro ejes mencionados el 2009 que son: Números, Álgebra y funciones, Geometría, Probabilidad y estadística. En la última actualización, la cual introduce el cambio de Objetivos de aprendizaje (OA), Objetivos actitudinales transversales (OAT), y se introduce el trabajo en las habilidades de los estudiantes. A continuación, se presenta un extracto de la nueva actualización del currículum.

> Las Bases Curriculares, por medio de los Objetivos de Aprendizaje (OA), definen la expectativa formativa que se espera que logren las y los estudiantes en cada asignatura y curso. Dichos objetivos integran conocimientos, habilidades y actitudes fundamentales para que los y las jóvenes alcancen un desarrollo armónico e integral que les permita enfrentar su futuro con las herramientas necesarias para participar de manera activa, responsable y crítica en la sociedad. (MINEDUC, 2016, p.8)
>
> Los Objetivos de Aprendizaje definen –para cada asignatura– los aprendizajes terminales esperables para cada año escolar. Se refieren a conocimientos, habilidades y actitudes que permiten a los y las estudiantes avanzar en su desarrollo integral, mediante la comprensión de su entorno y la generación de las herramientas necesarias para participar activa, responsable y críticamente con él. (MINEDUC,2016, p.10)

El plan de estudio actual busca entregar el conocimiento como “Objetivos de Aprendizaje”, éste establece potenciar las habilidades de los estudiantes, ya que se acompaña con “Objetivos actitudinales transversales” que son trabajo en equipo, perseverancia, tolerancia con las distintas ideas, etc. Las habilidades por su parte lo que busca es que nuestros estudiantes integren el conocimiento, y los construyan desde sus experiencias propias y significativas.

Lo que dice el actual programa de Matemática con respecto las habilidades es lo siguiente:

En el plano formativo, las habilidades son cruciales al momento de integrar, complementar y transferir el aprendizaje a nuevos contextos. La continua expansión y la creciente complejidad del conocimiento demandan capacidades de pensamiento crítico, flexible y adaptativo que permitan evaluar las habilidades son capacidades para realizar tareas y para solucionar problemas con precisión y adaptabilidad. Pueden desarrollarse en los ámbitos intelectual, psicomotriz o relevancia de la información y su aplicabilidad a distintas situaciones, desafíos, contextos y problemas. Así, desarrollar una amplia gama de habilidades es fundamental para fortalecer la capacidad de transferencia de los aprendizajes, es decir, usarlos de manera juiciosa y efectiva en otros contextos. Los Indicadores de Evaluación y los ejemplos de actividades de aprendizaje y de evaluación sugeridos en estos Programas de Estudio promueven el desarrollo de estos procesos cognitivos en el marco de la asignatura.” (MINEDUC, 2022, p. 11)

Las habilidades para trabajar en matemática son transversales desde 7° a 2° medio, ya que el actual programa está construido en espiral y los ejes se van potenciado al aumentar el nivel.

Habilidades:

- Resolver problemas.
- Argumentar y comunicar.
- Modelar.
- Representar.

En el actual programa que entró en vigencia en el año 2018 para segundo medio, la unidad número dos de álgebra y funciones aborda la función cuadrática. Lo que indica esta unidad con respecto al propósito de esta se menciona en la siguiente tabla:

Tabla 4: Propósito de la unidad número 2 del programa de estudio 2° medios

Propósito de la unidad número 2:
En esta unidad, se pretende que los y las estudiantes amplíen su conocimiento de funciones lineales, integrando el comportamiento cuadrático a la linealidad. Se espera que sean capaces de establecer distintas representaciones gráficas de la función cuadrática, utilizando tablas y gráficos obtenidos de forma manual o por medio de un software educativo. Asimismo, se busca que describan el comportamiento de la función cuadrática, con sus propias palabras, que lo relacionen con comportamientos de la vida real, y esto, a su vez, con el gráfico; que aprendan a determinar puntos especiales sobre el gráfico utilizando su conocimiento sobre expresiones algebraicas y productos notables, y que establezcan la relación entre la intersección de la gráfica con el eje X y la solución de una ecuación cuadrática, diferenciando cuándo esta tiene o no solución. También se espera que sean capaces de describir modelos de situaciones de cambio cuadrático, como oferta y demanda, lanzamiento de balones, caídas de aguas y otros. Se busca que aprendan a resolver ecuaciones cuadráticas, ya sea mediante la gráfica de la función cuadrática asociada, por medio de la aplicación del concepto de raíz cuadrática o con la fórmula, reforzando de este modo su conocimiento de función cuadrática; que comprendan el concepto de función inversa mediante sus distintas representaciones, ya sea con metáforas, por medio de su representación en gráficas o tablas, o por medio de un software educativo. Asimismo, se pretende que sean capaces de establecer la preimagen en el contexto de las tablas de valores, y utilizar este conocimiento para resolver problemas, además de escoger un modelo e identificar cuándo dos variables dependen de forma cuadrática, lineal o inversa.

Fuente: programa de estudio 2° medio pág. 96

3.3 Los objetivos de aprendizaje unidad 2

Los objetivos de aprendizaje en la unidad número dos de segundo medio se presentan en la siguiente tabla:

Tabla 5: Los objetivos de aprendizaje OA3 y OA4 en la unidad número 2.

Objetivos de aprendizaje: Se espera que los estudiantes sean capaces de:
OA3: Mostrar que comprenden la función cuadrática $f(x)= ax^2 + bx +c \ :(a\neq 0)$ ● Reconociendo la función cuadrática en $f(x)= ax^2$ situaciones de la vida diaria y otras asignaturas. ● Presentándola en tablas y gráficos de manera manual y/o con software educativo. ● Determinando puntos especiales de su gráfica. ● Seleccionando como modelo de situaciones de cambio cuadrático de otras asignaturas, en particular de la oferta y demanda.
OA 4: Resolver, de manera concreta, pictórica y simbólica o usando herramientas tecnológicas, ecuaciones cuadráticas de la forma: ● $a\, x^2= b$ ● $(ax +b)^2 = c$ ● $ax^2 + bx = 0$ ● $ax^2 + bx = c$ ● *(a, b, c son números racionales, a ≠ 0).*

Fuente: (currículum 2017) para segundo medio

Las habilidades que se trabajan en la unidad número dos en el currículum son las siguientes:

Tabla 6: Habilidades unidad 2 para segundo medio.

Habilidades unidad 2:

- Usar modelos, utilizando un lenguaje funcional para resolver problemas cotidianos y para representar patrones y fenómenos de la ciencia y la realidad. (OA h)
- Seleccionar modelos e identificar cuándo dos variables dependen cuadráticamente o inversamente en un intervalo de valores. (OA i)
- Ajustar modelos, eligiendo los parámetros adecuados para que se acerquen más a la realidad. (OA j)
- Elegir o elaborar representaciones de acuerdo a las necesidades de la actividad, identificando sus limitaciones y la validez de estas. (OA l)
- Representar y ejemplificar utilizando analogías, metáforas y situaciones familiares para resolver problemas. (OA o)

Fuente: (currículum 2017) para segundo medio

3.4 Texto actual de estudio segundo medio:

Tabla 7: Bienvenida al texto para los estudiantes de segundo medio.

Te damos la bienvenida a tu Texto de Matemática

El pensamiento matemático favorece el desarrollo de una actitud reflexiva y la comprensión de razonamientos y conceptos. La aplicación de la Matemática en diversos ámbitos permite cuantificar, razonar, representar y comunicar relaciones que se dan en el entorno.

Este texto está dividido en cuatro grandes unidades:

1. Números.
2. Álgebra y funciones.
3. Geometría.
4. Probabilidad y estadística.

Fuente: Libro del estudiante segundo medio MINEDUC

La siguiente tabla es el instrumento que permitirá registrar los datos obtenidos desde las variables de la evolución histórica del concepto de función cuadrática (ecuación, cónica, cinemática, función y modelización cuadrática), comparándolo con el currículo y el texto escolar de segundo medio en el eje de álgebra y funciones, para luego ser contrastados y así obtener los resultados y análisis con el cual se realizará el estudio.

Tabla 8: Tabla descriptiva de la función cuadrática que será trabajada como instrumento en los resultados y análisis

<table>
<tr><th>Representación</th><th>Tema histórico destacado</th><th>Currículo segundo medio</th><th>Texto estudiante lección 5 y lección 6 2022</th></tr>
<tr><td rowspan="3">ECUACIÓN

“El concepto de ecuación es uno de los más importantes del álgebra actual, y ha estado presente a través de la historia en diversas culturas ligada en muchos casos a situaciones donde intervienen nociones cuadráticas”

(Mesa & Villa, 2008), (p. 923)
.</td><td>Babilonios: presentan la concepción de la aritmética que llevaba a la ecuación cuadrática

• Cálculos astronómicos, astrología.
• Conteo: tablas sexagesimales de cuadrados y de raíces cuadradas, de cubos y raíces cúbicas.
• Tablas de logaritmos.
• Progresiones geométricas</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Griegos: “razonamientos numéricos para sucesiones y progresiones” desde lo aritmético y lo geométrico con Euclides “quien en los Elementos ofrece una noción más estructurada del concepto de cuadrado”.

• Problemas de movimiento, continuidad y del infinito
• Proporciones y ecuaciones.
• Inconmensurabilidad.
• Sentido geométrico de las magnitudes.
• Comparación entre magnitudes siempre del mismo tipo.
• Propiedades de las proporciones.</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>LOS ÁRABES
Árabes: “generalidad a sus procedimientos aritméticos recurriendo a la geometría para demostrar la validez de sus razonamientos”
(Vargas, 2011) (p. 4)</td><td></td><td></td></tr>
</table>

CÓNICA **"Apolonio de Perga (260 a.C), quien realiza un tratado sobre el estudio de las secciones cónicas que fue de gran trascendencia para el posterior desarrollo de la geometría analítica y los estudios del movimiento"** **(Mesa & Villa, 2008) (p. 925)**	Las cónicas, con la formulación de estas por Apolonio y el significado dado al término "parábola" y en el siglo XVII al relacionarlas como lugares geométricos con una ecuación de grado dos. • Explicación racional de los fenómenos. • Explicación de sucesos sujetos al cambio y al movimiento (Vargas, 2011) (p. 5)		
CINEMÁTICA **"Se destacan los trabajos sobre el movimiento de Galileo quien muestra que la expresión: "al cuadrado" significa una segunda potencia de una cantidad o el producto de un número por sí mismo, su participación en su avance o desarrollo está basado en los procesos de modelización de los fenómenos físicos. Galileo es el mayor representante de la transición entre la ecuación cuadrática relacionada con las superficies y su interpretación como modelo matemático de fenómenos físicos."** **(Mesa & Villa, 2008) (p. 926)**	El movimiento (cinemática), aunque concepto muy antiguo, solo hasta el siglo XVII los conocimientos físicos ligados a las matemáticas permitieron consolidarlo con el trabajo de Galileo Galilei con los "procesos de modelización de los fenómenos de variación" • Elaboración de símbolos para las operaciones matemáticas. • Perfeccionamiento de las notaciones sincopadas. • Estudio profundo de la astronomía. • Estudio del movimiento: velocidad, aceleración, distancia recorrida. • -Logaritmos, construcción de tablas • . Progresiones aritméticas y geométricas. (Vargas, 2011) (p. 6)		

FUNCIÓN	La función un concepto que se formaliza con Newton al construir el cálculo diferencial, la abordaremos desde diferentes representaciones y contextos. Siglo XVII • Extensión del concepto de número. • Crecimiento de los cálculos matemáticos y creación del álgebra simbólico - literal. • Comienzo de la geometría analítica, basada especialmente en el método de coordenadas. • Traducción de cualquier problema de la geometría plana en un problema algebraico equivalente. • Estudio y medición del calor, presión. • Estudio de la mecánica, relación entre movimiento rectilíneo y las fuerzas que lo afectan. • Formación del análisis infinitesimal como culminación en el proceso del cálculo diferencial e integral. (Vargas, 2011) (p. 7)		
	Siglo XVIII • Ver las funciones como expresiones analíticas. • Solución del problema de la cuerda vibrante. • Construcción más abstracta y universal del concepto de función. • Estudio de las propiedades de las funciones analíticas representadas por series entera. (Vargas, 2011) (p. 8)		
	Siglo XIX • Funciones como correspondencia. • Propiedades de las funciones con más rigor. • Liberación de la intuición geométrica. (Vargas, 2011) (p. 9)		
	Siglo XX • Funciones como correspondencia. • Propiedades de las funciones con más rigor. • Liberación de la intuición geométrica. (Vargas, 2011) (p 10)		

MODELIZACIÓN CUADRÁTICA	Galileo Galilei, fue el primero en establecer una relación entre variable tomando la noción de función cuadrática como modelación de fenómenos físicos, en particular el lanzamiento de una bala. Algunas de las características evidentes en los trabajos de Galilei (1638) para la modelización de los experimentos (fenómenos) son: • Dado un cuerpo • Se toma un plano inclinado, éste supone dos rectas una sobre la que se desliza un cuerpo y la otra servirá para calcular el tiempo transcurrido. • Registro de datos relacionando las dos variables involucradas en el fenómeno: La distancia y el tiempo. • Análisis de los datos recolectados • Concluye con una tercera variable resultado de la razón entre las otras dos, y dada la • La relación constante entre estas magnitudes permite generalizarlas. "…se establecen algunas características de la modelización en Galilei, entre ellas: la experimentación y toma de datos, el establecimiento de relaciones entre cantidades, la identificación de la variación y la creación de un modelo matemático que dé cuenta del fenómeno estudiado (Mesa & Villa, 2009) (p.1319)		

4 CAPÍTULO 4: RESULTADOS Y ANÁLISIS

4.1 Revisión del texto del estudiante

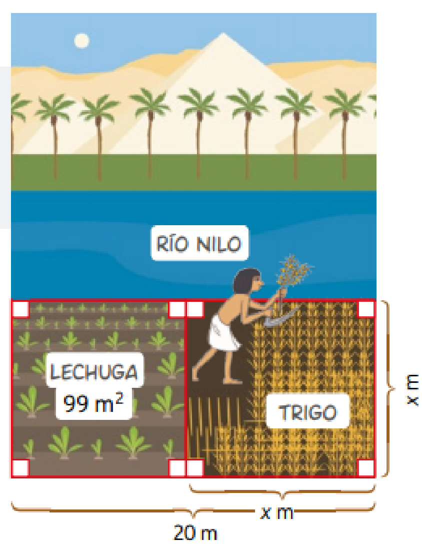
Se realizó una revisión del texto del estudiante de segundo medio del año 2022, específicamente en las lecciones 5 y 6 que son las que abordan la función y ecuación cuadrática, para así poder contrastar la secuencia que este tiene con respecto a la historicidad del objeto matemático (función cuadrática). Al observar el actual texto del estudiante de segundo medio, en la unidad dos se establece el objetivo aprendizaje, identificar una ecuación de segundo grado y sus componentes.

A continuación, se presenta el primer ejercicio introductorio del libro de texto del estudiante, con el que se abre la lección N°5 que trata el contenido de ecuación cuadrática.

Imagen 7: Ejercicio indagatorio de la ecuación de segundo grado.

1. Analiza la información. Luego, realiza las actividades.

En el antiguo Egipto, debido a las crecidas del río Nilo, las divisiones entre los terrenos aptos para la agricultura eran periódicamente borradas. Para ello, existían agrimensores especializados en realizar las mediciones de terrenos.



a. ¿Cuál es el área total destinada a lechugas? ¿Qué expresión algebraica representa el área destinada a sembrar trigo?

b. ¿Qué expresiones algebraicas puedes plantear para el área total de ambos terrenos? Compara tu respuesta.

c. Iguala la suma de las expresiones obtenidas en *a* con la expresión obtenida en *b*. Luego, despéjala de tal forma que quede 0 a un lado de la ecuación. ¿Qué características tiene la ecuación? ¿Qué diferencias tiene con una ecuación lineal?

d. ◆ Luego de algunos cálculos, un agrimensor determina que el lado del terreno destinado a sembrar trigo debería medir 11 m o 9 m. Reemplaza estos valores en la expresión anterior, Luego, responde: ¿cuál es correcto?, ¿por qué?

Fuente: Texto segundo medio pág. 51 Mineduc

En este primer acercamiento, se habla de la función cuadrática desde el punto de vista algebraico, continuando con una serie de ejercicios que busca reconocer la función de segundo grado, para luego presentar un modelo de ecuación cuadrática.

La imagen N°8, presenta un ejercicio que vincula la ecuación cuadrática con la física.

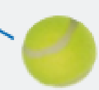
Imagen 8: Ejercicio de la ecuación de segundo grado.

FÍSICA

6. ◆ Analiza la siguiente información. Luego, responde.

Para conocer la altura *h* a la cual se encuentra un cuerpo que es lanzado verticalmente hacia arriba, despreciando el roce con el aire, se emplea la siguiente expresión:

$$h = h_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$



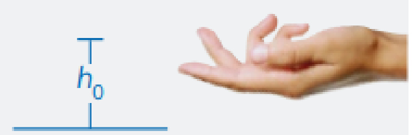
h_0: Altura inicial

v_0: Rapidez inicial

t: Tiempo transcurrido

g: Aceleración debida a la gravedad

⟶: Considera g como $10 m/s^2$



Un cuerpo se lanza verticalmente hacia arriba con una rapidez inicial de 50 m/s desde una altura de 5 metros.

a. ¿Cuál es la ecuación que representa su altura?

b. ¿A qué altura se encuentra el cuerpo al cabo de 3 segundos? ¿Y a los 7 segundos?

c. ¿En cuántos segundos vuelve a tener la altura inicial?

d. Compara la expresión anterior con la forma de la ecuación de segundo grado. ¿Cuáles son los valores de los coeficientes *a*, *b* y *c*?

Fuente: Texto segundo medio pág. 52 Mineduc

Al ir avanzando en el texto continúa con resolución de ecuaciones cuadráticas como objetivo de aprendizaje, mediante diferentes formas: factorización, dando ejemplos y ejercicios; continuando con la completación de cuadrados y finalmente con la fórmula general, entrega características algebraicas de cada método, ejemplos y ejercicios guiados. Luego continúa con la función cuadrática, el objetivo lo aborda como Identificar la función cuadrática y sus componentes, continúa con preguntas indagatorias que buscan que el estudiante reconozca la diferencia entre ecuación y función, posteriormente entrega una "definición" de tipo algebraica de la función cuadrática.

Imagen 9: Definición algebraica de función cuadrática

Se llama **función cuadrática o de segundo grado** a las funciones de la forma:

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \text{ con } a, b \text{ y } c \in \mathbb{R} \text{ y } a \neq 0.$$

Donde a, b y c corresponden a los coeficientes de la función. El dominio de la variable x de la función es $\mathbb{R}$, mientras que su recorrido es un subconjunto de $\mathbb{R}$.

Por ejemplo: $g(x) = 2x^2 + 2x + 0,5$ tiene dominio $\mathbb{R}$ y recorrido los reales mayores o iguales a 0.

Fuente: Texto segundo medio pág. 64 Mineduc

El texto invita a resolver problemas asociados a la función cuadrática mediante tipos de ejercicios e identificar si las expresiones algebraicas corresponden a función cuadrática o no.

Imagen 10: Ejercicios para identificar ecuaciones cuadráticas.

2. Identifica si las expresiones corresponden a funciones cuadráticas. Justifica.

a. $f(x) = 3x - 2$
b. $g(x) = 2x^3 - 4$
c. $h(x) = (5x - 2)(-3)$
d. $i(x) = (2x + 3)(x + 1)$
e. $j(x) = (x + 2)(3x - 1)$
f. $k(t) = 12\sqrt{t} - 1$

Fuente: Texto segundo medio pág. 64 Mineduc

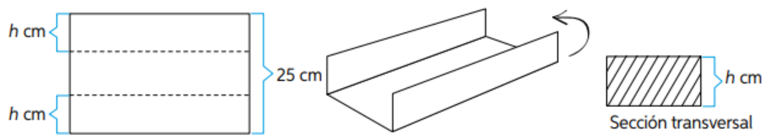
Luego continúa con problemas, en el que el estudiante debe aplicar modelos de función cuadrática y su resolución de tipo algebraica, estas son calificadas como actividades de profundización.

Imagen 11: ejercicios, actividades de profundización.

Actividades de profundización

5. Analiza la siguiente situación y responde.

Se quiere construir una canaleta con una lámina de aluminio de 25 centímetros de ancho. Para ello, se la doblará *h* cm en ambos lados, como se muestra en la imagen.



a. ◆ ¿Cuál es la expresión para el área de la sección transversal de dicha canaleta en función de su altura *h*?

b. ¿Qué valores puede tomar *h* para que el área de la sección transversal sea 75 cm^2?

c. ◆ ¿Entre qué intervalo de valores se encuentra *h*? Discute con tu curso.

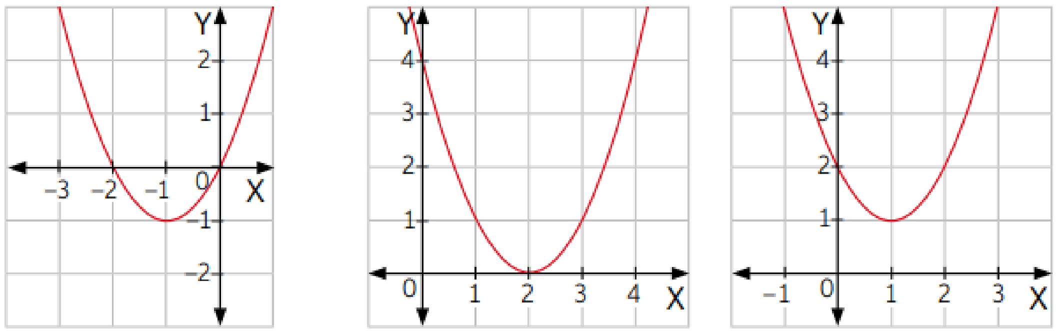
Fuente: Texto segundo medio pág. 64 Mineduc

Al ir avanzando en el texto vamos encontrando que entrega las representaciones de la función cuadrática, con tablas y gráfica en el plano cartesiano, menciona la característica de esta, dice que el gráfico se representa con una parábola y entrega sus características, tiene un máximo o un mínimo según sea su coeficiente a, indicando el vértice, que esta será un mínimo si a >0, o máximo si a<0. Luego presenta diferentes gráficos y pide al estudiante identificar las componentes de la función.

Imagen 12: ejercicios de función cuadrática

3. Analiza las siguientes gráficas:

I. $f(x) = x^2 + 2x$ **II.** $g(x) = x^2 - 4x + 4$ **III.** $h(x) = x^2 - 2x + 2$



a. Construye una tabla para cada una de las funciones. Identifica al menos 4 puntos que pertenezcan a la función.

b. ¿En qué puntos intersecan el eje X?, ¿y el eje Y?

c. Reemplaza en las ecuaciones el valor $x = 0$ y obtén los puntos $(0, f(0))$, $(0, g(0))$ y $(0, h(0))$. ¿A qué corresponden gráficamente?

d. Obtén los discriminantes de las ecuaciones $f(x) = 0$, $g(x) = 0$ y $h(x) = 0$. ¿Cómo se relacionan sus discriminantes con la cantidad de puntos en que las funciones intersecan el eje X?

Fuente: Texto segundo medio pág. 66 Mineduc

Entrega una cantidad de fórmulas las cuales sirven para encontrar valores de vértices, eje de simetría, concavidad.

Imagen 13: asociación de ecuación con función cuadrática.

El gráfico de una función cuadrática de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ siempre interseca el eje Y en el punto $(0, c)$.

Además, al asociar una ecuación de segundo grado a una función cuadrática, las soluciones corresponden a los puntos en que la gráfica de la función interseca el eje X. Esto, dependiendo del valor del discriminante (Δ). Estas soluciones también se conocen como "raíces" o "ceros" de la función. Se observan tres casos al respecto:

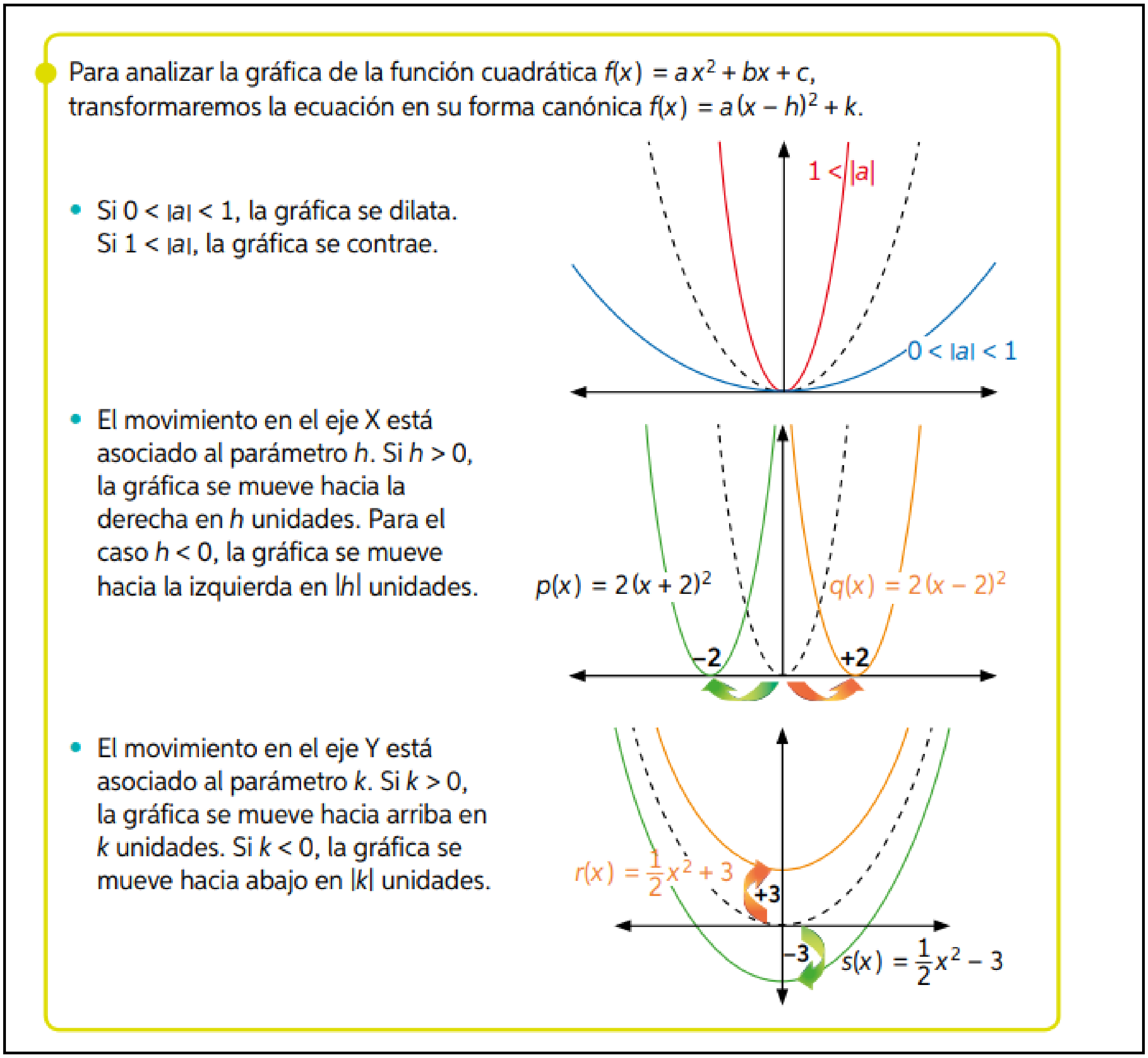
- $\Delta > 0 \Rightarrow x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ y $x_1 \neq x_2$, el gráfico de la función interseca el eje X en los puntos $(x_1, 0)$ y $(x_2, 0)$.
- $\Delta = 0 \Rightarrow x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ y $x_1 = x_2$, el gráfico de la función interseca el eje X en $(x_1, 0)$.
- $\Delta < 0 \Rightarrow x_1, x_2 \notin \mathbb{R}$ y el gráfico de la función no interseca el eje X.

Fuente: Texto segundo medio pág. 67 Mineduc

En esta imagen el texto entrega información de como asociar la función con la ecuación además habla del concepto de discriminante y cuál es la utilidad en la determinación de las raíces si es que las tiene.

Al seguir transitando por el texto entrega ejemplos de algunas aplicaciones de la función cuadrática aplicando modelos, para resolver problemas, de ganancias, lanzamientos de un balón desde el punto de vista de la física, lanzamientos y comportamientos de chorros de agua. Además, presenta algunos ejercicios que se trabajan con el software educativo Geogebra, para su representación gráfica en el cuaderno del estudiante.

Imagen 14: Forma de análisis de la función cuadrática.



Fuente: Texto segundo medio Mineduc

En este contenido el texto presenta la forma de análisis de la función cuadrática para transformarla en la forma canónica, dándole la importancia al valor absoluto de *a* para analizar su contracción o dilatación. El valor de “h” si es mayor o menor que cero lo cual indica si el desplazamiento es horizontal y por último el valor “libre” que indica si el desplazamiento es en la vertical.

4.2 Presentación de la función cuadrática

En la revisión realizada del texto de segundo medio se puede caracterizar el cómo se presenta el concepto de función cuadrática a los estudiantes.

Tabla 9: Tabla descriptiva de la función cuadrática

Representación	**Tema histórico destacado**	**Currículo segundo medio**	**Texto estudiante lección 5 y lección 6 2022**
ECUACIÓN “El concepto de ecuación es uno de los más importantes	Babilonios presentan la concepción de la aritmética que llevaba a la ecuación cuadrática • Cálculos astronómicos, astrología. • Conteo: tablas sexagesimales de cuadrados y de raíces cuadradas, de cubos y raíces cúbicas. • Tablas de logaritmos. • Progresiones geométricas	OA 4: Resolver, de manera concreta, pictórica y simbólica o usando herramientas tecnológicas, ecuaciones cuadráticas de la forma: $a x^2 = b$ $(ax + b)^2 = c$ $ax^2 + bx = 0$ $ax^2 + bx = c$	Trabaja con resolución de ecuaciones cuadráticas como objetivo de aprendizaje, mediante diferentes formas: factorización. Completación de cuadrados y fórmula general. entrega características algebraicas de cada método, ejemplos
	numéricos para sucesiones y progresiones” desde lo aritmético y lo geométrico con Euclides “quien en los Elementos ofrece una noción más estructurada del concepto de cuadrado” • Problemas de movimiento, continuidad y del infinito • . Proporciones y ecuaciones. • Inconmensurabilidad. • Sentido geométrico de las magnitudes. • Comparación entre magnitudes siempre del mismo tipo. • Propiedades de las proporciones.		
	LOS ÁRABES Árabes: “generalidad a sus procedimientos aritméticos recurriendo a la geometría para demostrar la validez de sus razonamientos” (Vargas, 2011) (p. 4)		

CÓNICA "Apolonio de Perga (260 a.C), quien realiza un tratado sobre el estudio de las secciones cónicas que fue de gran trascendencia para el posterior desarrollo de la geometría analítica y los estudios del movimiento" (Mesa & Villa, 2008) (p. 925)	Las cónicas, con la formulación de estas por Apolonio y el significado dado al término "parábola" y en el siglo XVII al relacionarlas como lugares geométricos con una ecuación de grado dos. · Explicación racional de los fenómenos. . Explicación de sucesos sujetos al cambio y al movimiento (Vargas, 2011) (p. 5)	Esta representación no se aborda en el currÍculum	Esta representación no se aborda en el texto.
CINEMÁTICA "Se destacan los trabajos sobre el movimiento de Galileo quien muestra que la expresión: "al cuadrado" significa una segunda potencia de una cantidad o el producto de un número por sí mismo, su participación en su avance o desarrollo está basado en los procesos de modelización de los fenómenos físicos. Galileo es el mayor representante de la transición entre la ecuación cuadrática relacionada con las superficies y su interpretación como modelo matemático de fenómenos físicos." (Mesa & Villa, 2008) (p. 926)	El movimiento (cinemática), aunque concepto muy antiguo, solo hasta el siglo XVII los conocimientos físicos ligados a las matemáticas permitieron consolidarlo con el trabajo de Galileo Galilei con los "procesos de modelización de los fenómenos de variación" • Elaboración de símbolos para las operaciones matemáticas. • Perfeccionamiento de las notaciones sincopadas. • Estudio profundo de la astronomía. • Estudio del movimiento: velocidad, aceleración, distancia recorrida. • -Logaritmos, construcción de tablas • . Progresiones aritméticas y geométricas. (Vargas, 2011) (p. 6)	En el propósito de la unidad número dos dice lo siguiente: "se espera que sean capaces de describir modelos de situaciones de cambio cuadrático, como oferta y demanda, lanzamiento de balones, caídas de aguas y otros."	El texto presenta algunos ejercicios vinculados con la física, como lanzamiento de una moneda al aire, lanzamiento de balones y chorros de agua. El estudiante debe reconocer la función cuadrática y responder las preguntas, como altura máxima, tiempo de la trayectoria, etc. Se presentan actividades donde aplican modelos de situaciones de la vida cotidiana de funciones cuadráticas.

FUNCIÓN	La función un concepto que se formaliza con Newton al construir el cálculo diferencial, la abordaremos desde diferentes representaciones y contextos. **Siglo XVII** • Extensión del concepto de número. • Crecimiento de los cálculos matemáticos y creación del álgebra simbólico - literal. • Comienzo de la geometría analítica, basada especialmente en el método de coordenadas. • Traducción de cualquier problema de la geometría plana en un problema algebraico equivalente. • Estudio y medición del calor, presión. • Estudio de la mecánica, relación entre movimiento rectilíneo y las fuerzas que lo afectan. • Formación del análisis infinitesimal como culminación en el proceso del cálculo diferencial e integral. (Vargas, 2011) (p. 7	OA3: Mostrar que comprenden la función cuadrática $f(x)= ax^2 + bx +c$:$(a\neq0)$ Reconociendo la función cuadrática en $f(x)= ax^2$ situaciones de la vida diaria y otras asignaturas. Presentándola en tablas y gráficos de manera manual y/o con software educativo. Determinando puntos especiales de su gráfica. Seleccionando como modelo de situaciones de cambio cuadrático de otras asignaturas, en particular de la oferta y demanda	Se habla de la función desde el punto de vista algebraico. Presenta una serie de ejercicios que busca reconocer la función de segundo grado. Presenta un modelo de ecuación cuadrática y busca que el estudiante la reconozca como tal. Presenta la función cuadrática, el objetivo lo aborda como" Identificar la función cuadrática y sus componentes". Busca que el estudiante reconozca la diferencia entre ecuación y función. Entrega una "definición" de tipo algebraica de la función cuadrática. Entrega información de cómo se vincula la ecuación con la función cuadrática. Menciona la intersección del eje Y el valor de la discriminante, indicando si interseca el eje x según el resultado.
	Siglo XVIII • Ver las funciones como expresiones analíticas. • Solución del problema de la cuerda vibrante. • Construcción más abstracta y universal del concepto de función. • Estudio de las propiedades de las funciones analíticas representadas por series entera (Vargas, 2011) (p. 9)		
	Siglo XIX • Funciones como correspondencia. • Propiedades de las funciones con más rigor. • Liberación de la intuición geométrica. (Vargas, 2011) (p. 9)		
	Siglo XX • Funciones como correspondencia. • Propiedades de las funciones con más rigor. • Liberación de la intuición geométrica. (Vargas, 2011) (p 10)		

MODELIZACIÓN CUADRÁTICA	Galileo Galilei, fue el primero en establecer una relación entre variable tomando la noción de función cuadrática como modelación de fenómenos físicos, en particular el lanzamiento de una bala. Algunas de las características evidentes en los trabajos de Galilei (1638) para la modelización de los experimentos (fenómenos) son: • Dado un cuerpo • Se toma un plano inclinado, éste supone dos rectas una sobre la que se desliza un cuerpo y la otra servirá para calcular el tiempo transcurrido. • Registro de datos relacionando las dos variables involucradas en el fenómeno: La distancia y el tiempo. • Análisis de los datos recolectados • Concluye con una tercera variable resultado de la razón entre las otras dos, y dada la • La relación constante entre estas magnitudes permite generalizarlas. "…se establecen algunas características de la modelización en Galilei, entre ellas: la experimentación y toma de datos, el establecimiento de relaciones entre cantidades, la identificación de la variación y la creación de un modelo matemático que dé cuenta del fenómeno estudiado (Mesa & Villa, 2009) (p.1319)	OA3: Mostrar que comprenden la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$:($a \neq 0$) Reconociendo la función cuadrática en $f(x) = ax^2$ situaciones de la vida diaria y otras asignaturas. Presentándola en tablas y gráficos de manera manual y/o con software educativo. Determinando puntos especiales de su gráfica. Seleccionando como modelo de situaciones de cambio cuadrático de otras asignaturas, en particular de la oferta y demanda	

4.3 Saberes recuperados en el currículum y libro de texto

En la siguiente tabla se expone la recuperación (marcado con X) o la ausencia de este último (espacio en blanco) del proceso histórico en comparativa con el currÍculum y libro de texto del estudiante. Las letras X indican que en el currículum y/o en el texto de estudio del año 2022, se aborda de alguna forma este contenido.

Tabla 10: Tabla comparativa de recuperación

Representación	Tema histórico destacado	Currículo segundo medio	Texto estudiante lección 5 y lección 6 2022
Ecuación	Babilonios presentan la concepción de la aritmética que llevaba a la ecuación cuadrática	X	X
	Cálculos astronómicos, astrología.		
	Conteo: tablas sexagesimales de cuadrados y de raíces cuadradas, de cubos y raíces cúbicas.	X	X
	Tablas de logaritmos. Progresiones geométricas		
	Griegos: “razonamientos numéricos para sucesiones y progresiones” desde lo aritmético y lo geométrico con Euclides “quien en los Elementos ofrece una noción más estructurada del concepto de cuadrado”	X	X
	Problemas de movimiento, continuidad y del infinito	X	X
	Proporciones y ecuaciones.	X	X
	Inconmensurabilidad		
	Sentido geométrico de las magnitudes.	X	X
	Comparación entre magnitudes siempre del mismo tipo.	X	X
	Propiedades de las proporciones	X	X
	LOS ÁRABES Árabes: “generalidad a sus procedimientos aritméticos recurriendo a la geometría para demostrar la validez de sus razonamientos” Vargas (2011 pág. 4)	X	X
CÓNICA	Las cónicas, con la formulación de estas por Apolonio y el significado dado al término “parábola” y en el siglo XVII al relacionarlas como lugares geométricos con una ecuación de grado dos. Explicación racional de los fenómenos. Explicación de sucesos sujetos al cambio y al movimiento Vargas (2011 pág. 5)		

CINEMÁTICA	El movimiento (cinemática), aunque concepto muy antiguo, solo hasta el siglo XVII los conocimientos físicos ligados a las matemáticas permitieron consolidarlo con el trabajo de Galileo Galilei con los “procesos de modelización de los fenómenos de variación”	X	X
	Elaboración de símbolos para las operaciones matemáticas.	X	X
	Perfeccionamiento de las notaciones sincopadas.		
	Estudio profundo de astronomía.		
	Estudio del movimiento: velocidad, aceleración, distancia recorrida	X	X
	Logaritmos, construcción de tablas		
	Progresiones aritméticas y geométricas. Vargas (2011 pág. 6)		
Función	La función un concepto que se formaliza con Newton al construir el cálculo diferencial, la abordaremos desde diferentes representaciones y contextos. **Siglo XVII.**	X	X
	Extensión del concepto de número		
	Crecimiento de los cálculos matemáticos y creación del álgebra simbólico - literal.	X	X
	Comienzo de la geometría analítica, basada especialmente en el método de coordenadas	X	X
	Traducción de cualquier problema de la geometría plana en un problema algebraico equivalente.		
	Estudio y medición del calor, presión		
	Estudio de la mecánica, relación entre movimiento rectilíneo y las fuerzas que lo afectan.	X	X
	Formación del análisis infinitesimal como culminación en el proceso del cálculo diferencial e integral. Vargas (2011 pág. 7)		
	Siglo XVIII Ver las funciones como expresiones analíticas. .		
	Solución del problema de la cuerda vibrante		

	Construcción más abstracta y universal del concepto de función.	X	X
	Estudio de las propiedades de las funciones analíticas representadas por series entera Vargas (2011 pág. 8)		
	Siglo XIX Funciones como correspondencia.		
	Propiedades de las funciones con más rigor.	X	X
	Liberación de la intuición geométrica. Vargas (2011 pág. 9)		
	Siglo XX Funciones como correspondencia.		
	Propiedades de las funciones con más rigor	X	X
	Liberación de la intuición geométrica. Vargas (2011 pág. 10)		
MODELIZACIÓN CUADRÁTICA	Galileo Galilei, fue el primero en establecer una relación entre variable tomando la noción de función cuadrática como modelación de fenómenos físicos, en particular el lanzamiento de una bala. Algunas de las características evidentes en los trabajos de Galilei (1638) para la modelización de los experimentos (fenómenos) son: • Dado un cuerpo • Se toma un plano inclinado, éste supone dos rectas una sobre la que se desliza un cuerpo y la otra servirá para calcular el tiempo transcurrido. • Registro de datos relacionando las dos variables involucradas en el fenómeno: La distancia y el tiempo. • Análisis de los datos recolectados • Concluye con una tercera variable resultado de la razón entre las otras dos, y dada la • La relación constante entre estas magnitudes permite generalizarlas. "…se establecen algunas características de la modelización en Galilei, entre ellas: la experimentación y toma de datos, el establecimiento de relaciones entre cantidades, la identificación de la variación y la creación de un modelo matemático que dé cuenta del fenómeno estudiado Mesa & Villa (2009 pág. 1319).	X (sólo ítem 3)	X (sólo ítem 3)

4.4 **Análisis:**

A continuación, se presenta el análisis de los resultados expuestos en la tabla comparativa de la función cuadrática, los cuales dan cuenta de la presencia de las cinco representaciones del objeto matemático en el currículo y texto de estudio de segundo medio.

4.4.1 ***Ecuación:***

La ecuación cuadrática en el texto de estudio de segundo medio es presentada de manera inductiva, es decir, desde lo particular a lo general, el libro de texto plantea la temática desde una situación práctica, como lo es el desarrollo de actividades de aprendizaje, para descubrir propiedades y características de la resolución de la ecuación cuadrática. Estos elementos guardan relación parcial con la evolución histórica, dado que ciertos estadios no se recuperan en el currículum o en el libro de texto, tales como, proporciones y ecuaciones, cálculos astronómicos y astrología, entre otros.

Posteriormente, el texto se concentra en encontrar soluciones a diferentes representaciones de las ecuaciones cuadráticas y para esto ofrece una serie de métodos de resolución, tales como: término común; cuadrado de binomios; diferencia de cuadrados; y factorización de trinomios, siguiendo el Objetivo del currículo de "resolver ecuaciones cuadráticas en sus diversas formas".

4.4.2 ***Cónicas:***

Al analizar el currículo y el texto de estudio de segundo medio podemos observar que no se incluyen la representación geométrica de la función cuadrática como lugar geométrico inmerso en las cónicas, desde un punto de visto geométrico analítico, en este caso la construcción de la parábola, aspecto fundamental para la comprensión del objeto matemático, desde un punto de vista geométrico, y que según Cordero y Suarez (2005), la graficación es el medio por el cual la relación modelación-graficación-tecnología se puede implementar en las aulas para construir significativamente conocimiento matemático.

El libro de texto representa geométricamente la función cuadrática, por medio de la parábola como objeto matemático asociado a la función cuadrática, permitiendo la comprensión de los fenómenos físicos expuestos y de las relaciones entre sus variables: oferta y demanda en economía; distancia y tiempo en física, etc. Estas características se presentan desde el reconocimiento y comprensión de ciertas propiedades de la parábola, que no representan su construcción.

4.4.3 ***Cinemática:***

La cinemática se entiende como el estudio de los cuerpos con un movimiento variable y viene a ser un análisis de orden más complejo que el estudio de los movimientos lineales, en este sentido, la evolución histórica de la función cuadrática adquiere un carácter fuertemente experimental con los trabajos de Galileo Galilei en el siglo XVII, permitiendo generar procesos de modelización de los fenómenos de variación.

La representación gráfica del cambio en diversos tipos de variables, tales como: calor, luz, velocidad, permiten relacionar variables desde el ejercicio de la experiencia de trabajar cuantitativamente con estos mismos fenómenos físicos, alejándose del trabajo netamente abstracto de combinar variables.

La importancia de esta representación cinemática radica en su carácter cuantificable experimental, y de permitir vincular el mundo físico observable con la modelación de un fenómeno, como el lanzamiento de una bala o un balón.

Esta posibilidad o recurso pedagógico de la historia permite conectar con las otras representaciones que posee la función cuadrática, como: la modelación; las cónicas; la función cuadrática, y reforzar la idea original de “relacionar” objetos funcionales, en este caso, variables con diferentes magnitudes y cantidades.

De esta manera se observa un tratamiento parcial de la modelación de fenómenos cuadráticos, que no tiene relación con las actividades expuestas en el libro de texto y en comparativa, el currículum busca que los estudiantes puedan identificar, describir, y aplicar modelos, que, en contraste con el libro de texto, este último plantea como objetivo modelar situaciones de cambio cuadrático de la vida cotidiana y las ciencias por medio de funciones cuadráticas. Lo que representa una desarticulación entre estos instrumentos.

4.4.4 Función:

En el siglo XVIII se analizan los fenómenos físicos a través de un objeto matemático eminentemente analítico y se deja de usar la representación geométrica para dar paso a la definición formal de función. De esta manera se comienza a trabajar la vinculación o relación de variables como una correspondencia entre valores definidos de estas variables, donde la intención de los matemáticos fue desligar la función de los fenómenos físicos o fórmulas, y construir la teoría de conjuntos.

Con el tiempo se estableció una fórmula general de función como una regla de correspondencia entre dominio y rango, donde ambos conjuntos (X e Y) son arbitrarios o generalizables, estableciendo la definición de función actual.

El currículum y el texto escolar hablan de la función cuadrática desde un punto de vista conjuntista y que guarda vínculo con un tipo de relación en matemáticas. En general, esta representación es la más trabajada en el texto, y se presenta en sus distintas formas polinómicas, canónicas y factorizadas.

En este sentido, la función cuadrática ligada al álgebra es trabajada con el objetivo de aprender a resolverlas para encontrar las soluciones a los problemas planteados de la vida cotidiana, tales como oferta-demanda; del movimiento de los cuerpos; de los ejercicios donde se debe tabular y graficar posteriormente; en definitiva, la función entregada algebraicamente, es funcional a los parámetros establecidos por el currículum, pero que no se vinculan el proceso histórico, y su relación con el análisis.

4.4.5 ***Modelización cuadrática***

El análisis de la modelización cuadrática está vinculado a lo realizado por Galileo Galilei y la cinemática, al buscar modelizar los fenómenos físicos estudiados.

Varios autores Pech y Ordaz (2010) y Mercado, Aguas y Arrieta (2010) toman el objeto matemático desde el punto de vista de la modelación, según estos, la modelación es un elemento que permite relacionar tipos de representación que pueden evidenciar una mejor comprensión del objeto en cuestión. Por su parte el libro de texto no propone actividades de aprendizaje para el tratamiento de problemáticas de variación entre variables o magnitudes, para su posterior generalización.

Por lo tanto, existe una incoherencia entre lo declarado por el currículum y el libro de texto.

5 CAPÍTULO 5: CONCLUSIONES (REFLEXIONES, LIMITACIONES Y PROYECCIONES)

5.1 Conclusiones

Luego de haber contrastado y comparado el aspecto histórico-epistemológico del objeto matemático, con el currículum y el libro de texto del estudiante de segundo medio año 2022, se pude evidenciar lo siguiente:

El concepto de función cuadrática se escolariza parcialmente respecto de su formación conceptual a través de la historia como fruto de la investigación en matemática.

Siguiendo a Chevallard, existe un distanciamiento entre el saber científico y el saber a enseñar que impide una adecuada transposición de la función cuadrática en el currículo y el texto de estudio al existir una exposición parcial de los saberes.

En este sentido, se puede encontrar una desincretización (separación en saberes parciales del objeto científico) por parte de la noosfera que no es adecuada y que lo descontextualiza o restringe de conocer su evolución histórica. El estudio arroja que en el proceso de escolarización de la función cuadrática no se considera incluir su representación geométrica vinculada al estudio de las cónicas como la parábola.

En el texto queda ausente el trabajo de este objeto matemático desde la habilidad de modelación, más bien, se aborda de forma incompleta, es decir es tratada como una herramienta de aplicación de modelos que el estudiante solo debe reconocer. Además, se direcciona el abordaje de este objeto matemático hacia el álgebra, con la finalidad de resolver problemas más que a diseñar modelos.

Esto nos indica que el objeto matemático no se desarrolla en su totalidad al estudiante, por lo tanto, pierde parte de las características históricas de su evolución.

Por otro lado, este marco teórico nos permite observar tanto una despersonalización de los saberes, ya que no menciona quienes son los autores relacionados con el desarrollo del concepto de función cuadrática; y como un diseño programático de la adquisición del saber de manera poco adecuada, porque la secuencia de aprendizaje no potencia a la ecuación cuadrática, que es un caso particular de la función de segundo grado, viéndose como dos objetos diferentes, no vinculados entre sí.

La noosfera es vital en la decisión de cómo se pretende presentar el objeto, los objetivos y contenidos que se establecen no muestran especificidad y son muy generales, se puede establecer cierta coherencia entre saber científico y el saber a enseñar. No obstante, si se analiza el libro de texto se puede observar un claro distanciamiento entre los objetivos propuestos y la exposición metodológica de estos saberes. Por lo tanto, es relevante que se cuente con una noosfera estructurada por especialistas, docentes, y apoderados que estudien los planes y programas, en miras de contar con un sistema educativo más atractivo y pertinente con las investigaciones en educación matemática.

Esta inadecuada transposición del concepto de función cuadrática en el proceso de escolarización conlleva a que no se presenten elementos esenciales del concepto que permitan una reconstrucción del objeto matemático durante el proceso de enseñanza aprendizaje.

5.2 **Limitaciones:**

Dentro de los parámetros establecidos en esta investigación, la transposición didáctica interna no es un elemento de análisis y de comprensión de la tipología de saberes y, por lo tanto, el docente y sus prácticas metodológicas no son parte de este estudio. Nuestro trabajo abarca solamente la transposición externa, por lo que impide una vinculación con la práctica docente. No obstante, los elementos por los cuales se estableció el contraste y la comparativa de este estudio, podría establecer una herramienta para transponer adecuadamente el objeto matemático según los parámetros de Chevallard. Esta herramienta respecto de la función cuadrática en el aula podría desarrollarse a través de la capacitación y diseño de actividades de aprendizaje que tengan vínculo con los orígenes históricos del objeto.

5.3 **Proyecciones:**

Todos los elementos de comprensión (historicidad-epistemológica, currículum, libro de texto y transposición didáctica) ya están reconocidos y legitimados, por lo tanto, una posible herramienta que permite transponer el objeto adecuadamente, tanto de forma externa e interna podría ser el diseño instruccional de actividades de aprendizaje. Estas actividades tendrían esencialmente un vínculo con los elementos históricos y con los orígenes del objeto, permitiendo al docente principalmente, transponer adecuadamente el objeto matemático en estudio, en coherencia con la evolución histórica de la función cuadrática. Es decir, la transposición interna producida en el proceso de contextualización a cargo del docente, representa una posible proyección investigativa en la cual las prácticas pedagógicas son el centro de interés.

6 BIBLIOGRAFÍA

Alfaro, C., & Chavarría, J. (2012). LA TRANSPOSICIÓN DIDÁCTICA: UN EJEMPLO EN EL SISTEMA EDUCATIVO COSTARRICENSE. *UNICIENCIA, 26*(1-2), 153-168. https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=475947764014

Anacona, M. (2003). La historia de las matemáticas en la educación. *EMA, 8*(1), 30-46. http://funes.uniandes.edu.co/1516/

Bachelard, G. (1938). *La formación del espíritu científico. Trad. cast., 1948, 14a. ed., 1987.* Siglo XXI.

Bakker, A., & Gravemeijer, K. (2006). Bakker, Arthur. & Gr An historical phenomenology of mean and median. *Educational Studies in Mathematics, 62*, 149-168. doi: 10.1007/s10649-006-7099-8

Beth, E., & J.Piaget. (1980). *Epistemología Matemática y Psicología: relaciones entre la lógica formal y el pensamiento real.* Crítica.

Boyer, C. (2015). *Historia de la matemática.* Alianza editorial.

Briceño, O., & Ábalos, G. B. (2016). Una secuencia para la introducción de la función cuadrática a través de la resignificación de aspectos variacionales. *Tecné, Episteme y Didaxis: TED, 39*. Obtenido de https://doi.org/10.17227/01203916.4584

Cañon, C. (1993). *La Matemática creación y descubrimiento.* UPCO.

Carrillo, A. (2018). *Transposición Didáctica del concepto de mezcla: Estudio de caso de dos profesoras de tercero de primaria. (Tesis de Magister, Universidad Pedagógica Nacional).*

Chevallard, Y. (1991). *Transposición Didáctica.* Aique.

Chevallard, Y., Bosch, M., & Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje.* ICE/Horsor.

Clark, K. (2012). History of mathematics: illuminating understanding of school mathematics concepts for pre-service mathematics teachers. *Educational Educational Studies in Mathematics, 81*(1), 67-84. doi:doi:10.1007/s10649-011-9361-y

Contreras, F. (2013). Vigilancia epistemológica. *Horizonte de la Ciencia, 3*(5), 39-43. Obtenido de https://www.researchgate.net/publication/318848307_Vigilancia_epistemologica

Cordero, F., & Suárez, L. (2005). Modelación de matemática educativa. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 18*.

Cuevas, C., & Díaz, J. (2013). La historia de la matemática un factor imprescindible en la elaboración de una propuesta didáctica. El caso del concepto de función. *El Cálculo y su Enseñanza, 5*(5), 165-179. http://mattec.matedu.cinvestav.mx/el_calculo/

Farfán, R., & García, M. (2015). El Concepto de Función: Un Breve Recorrido Epistemológico. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 18*, 489- 494. Obtenido de https://www.researchgate.net/publication/266369617

J. Villa. (2008). El concepto de función. Una mirada desde las matemáticas escolares. *Acta Latinoamericana de Educación Matemática, 21*, 245-254.

Jankvist, U. (2009). On empirical research in the field of using history in mathematics education. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 12*(1), 67-101. https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33512104

L.Mercado, Aguas, N., & Arrieta, W. (2010). Comprensión del concepto de función a través de situaciones problema relacionadas con el contexto. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 23*, 495-503. http://funes.uniandes.edu.co/4628/

María Angélica Pease, .. F. (2015). *Cognición, Neurociencias y Apendrizaje El adolescente en la educación superior.* Lima: Fondo Editorail Pontificia Universidad Católica.

Mesa, Y., & Villa, J. (2008). Elementos históricos, Epistemológicos y Didácticos de la función Cuadrática. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 21*(s/n), 922-930.

Mesa, Y., & Villa, J. (2009). El papel de Galileo Galilei en la construcción histórica del concepto de función cuadrática. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 22*(s/n), 1315-1323. http://funes.uniandes.edu.co/896/

MINEDUC, C. (2016). *Programa de Estudio Matemática Segundo Medio, Ministerio de Educación Chile.* SM Chile. https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-34360_programa.pdf

MINEDUC, C. (2022). *Matemática Texto del estudiante Segundo Medio, Ministerio de Educación Chile.* SM S.A.

Pech, V., & Ordaz, M. (2010). Las producciones de los estudiantes sobre el concepto función en situaciones variacionales. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 23*, 15-22.

Pecharromán, C. (2013). Naturaleza de los objetos matemáticos: representación y significado. *Enseñanza de las Ciencias, 31*(3), 121-134. https://raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/285795/373798

Peña, T., & Pirella, J. (2007). La complejidad del análisis documental. Información, cultura y sociedad. *Revista del Instituto de Investigaciones Bibliotecológicas*(16), 55-81. https://www.redalyc.org/pdf/2630/263019682004.pdf

Pinto, M., Agustín, M., & García, F. (2002). *Indización y resumen de documentos digitales y multimedia: técnicas y procedimientos.* TREA.

Ruiz, L. (1993). *Concepciones de los Alumnos Secundarios Sobre la Noción de Función: Análisis Epistemológico y Didáctico (Tesis doctoral, Universidad de Granada).* Repositorio Institucional. http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/tesis/Tesis_LRuiz-Higueras.pdf

Sastre, P., Rey, G., & Boubée, C. (2008). El concepto de función a través de la Historia. *Iberoamericana de Educación Matemática, 4*(16), 141-155. https://union.fespm.es/index.php/UNION/issue/view/23/

Schoenfeld, A., Smith, J., & Arcavi, A. (1993). Learning: The microgenetic analysis of one student's understanding of a complex subject matter domain. En Glaser, R (Ed). *Advances in instructional psychology. Mahwah: LEA*, 55-175.

Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of function. *Washington: Mathematical Association of America, 25*, 25-58.

Smestad, B., Jankvist, U., & Clark, K. (2014).). Teachers' mathematical knowledge for teaching in relation to the inclusion of history of mathematics in teaching. *Nordic Studies in Mathematics Education, 19*(3-4), 169- 183.

Spivak, M. (1992). *Cálculo Infinitesimal.* Barcelona: Editorial Reverté, S.A.

Tzankis, C., & Arcavi, A. (2000). *Integrating history of mathematics in the classroom: An analytic survey.* Dordrecht: Kluwer Academic. doi:10.1007/0-306-47220-1_7

Ugalde, W. (2014). Funciones: desarrollo histórico del concepto y actividades de enseñanza aprendizaje. *Revista digital Matemática, Educación e Internet,, 14*(1), 1-48. http://www.tec-digital.itcr.ac.cr/revistamatematica/

USACH. (2020). *7 y 8 de enero II Encuentro Nacional de Didácticas Específicas*. Recuperado el 15 de diciembre de 2022, de Unidad de Innovación Educativa: https://www.unie.usach.cl/noticia/7-y-8-de-enero-ii-encuentro-nacional-de-did%C3%A1cticas-espec%C3%ADficas

Vargas, M. (2011). *El concepto de función y sus aplicaciones en situaciones relacionadas con fenómenos físicos, que conducen a un modelo cuadrático, una propuesta para trabajar en el grado noveno. (Tesis de Magister , Universidad Nacional de Colombia.* Repositorio Institucional. https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/10183

Vázquez, N. (2010). *Un ejercicio de transposición didáctica en torno al concepto de número natural en preescolar y el primer grado de educación básica. (Tesis de Magister, Universidad de Antioquía).* Repositorio Institucional. http://funes.uniandes.edu.co/12087/

Vickery, B. (1970). *Techniques of information retrieval.* Butterworths.